

3.7.3 (1) 対偶 「 L/K が単拡大 $\Rightarrow L/K$ は無有限次代数拡大でない」を示せばよい。

L/K が単拡大より $\exists \alpha \in L, L=K(\alpha)$

ゆえに L/K が無限次代数拡大であるとは矛盾。 L/K は代数拡大より

命題 3.1.18 (3) から、有限次拡大となり矛盾

(1) 以上 題意は示された。

(2) $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ は代数拡大であり、演習 3.2.1 より無限次拡大。

より (1)より、単拡大ではない。

すなわち $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ がある。これは既約である。

より $\text{ch } \mathbb{Q} = 0$ である。これは重根を持たない。

ゆえに $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ は分離代数拡大。

(1) 以上 $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ が求める具体例である。