

2.4.2

M, N は加群であり、 f は加群の準同型である。

$\ker f \subset M$, $\operatorname{Im} f \subset N$ は加群であることは群論から分る。[I, p. 41, 25.3]

よって $\ker f$ と $\operatorname{Im} f$ はそれぞれ作用に関して閉じていることを示せばよい。

まず $\ker f$ について、 $a \in A$, $x \in \ker f$ とすると、 $f(ax) = 0_N$ である。

f は準同型より

$$f(ax) = a f(x) = 0$$

よって

$ax \in \ker f$ である。作用に関して閉じている。

次に $\operatorname{Im} f$ について

$a \in A$, $x \in \operatorname{Im} f$ とすると

$\exists x' \in M$, $f(x') = x$

f は加群の準同型より

$$f(ax') = a f(x') = ax$$

よって

$ax \in \operatorname{Im} f$ である。作用に関して閉じている。

(7) が必要

題意からわかる。