

2.5.1

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4 \quad (2.11.7)$$

$$\text{例} \quad X \in \ker(T_A) \Leftrightarrow AX = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ker(T_A) = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cong \mathbb{Z}$$

$$\text{例} \quad AX = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_2 \\ 6x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cong \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{例} \quad \text{coker}(T_A) &= \mathbb{Z}^4 / \text{Im}(T_A) \\ &= \mathbb{Z}^4 / \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\cong \frac{\mathbb{Z}^4}{\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}} \\ &\cong \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

これは $3\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ 等から
正則部分群 $T(\mathbb{Z})$ の
形式 $A \in T(\mathbb{Z})$ による。