

4.1.14 演習 4.1.1 の (1) の解答を用いる

$\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong G_3$ であるので G_3 の部分群について調べる

G_3 の自明でない部分群は位数 2 または 3 である

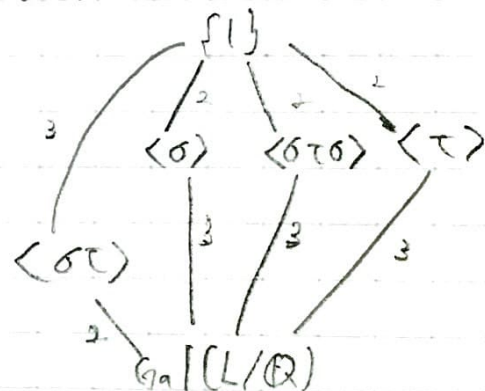
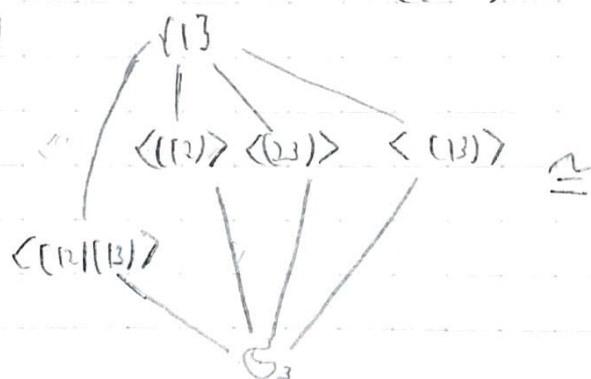
(i) 位数 2 の部分群 \Leftrightarrow 位数 2 の元から生成される群

$$\Leftrightarrow \langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle = \langle (12)(13)(14) \rangle$$

(ii) 位数 3 の部分群 \Leftrightarrow 位数 3 の元から生成される部分群

$$\Leftrightarrow \langle (123) \rangle = \langle (12)(13) \rangle$$

(i), (ii) より



したがって $\sigma, \tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ である

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{3}, \quad \alpha_2 = \omega \sqrt[3]{3}, \quad \alpha_3 = \omega^2 \sqrt[3]{3} \quad \text{とする}$$

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_2, \quad \sigma(\alpha_2) = \alpha_1, \quad \sigma(\alpha_3) = \alpha_3$$

$$\tau(\alpha_1) = \alpha_3, \quad \tau(\alpha_2) = \alpha_2, \quad \tau(\alpha_3) = \alpha_1 \quad \text{とする}$$

よって

$$\sigma\tau\sigma(\alpha_1) = \alpha_1 \quad \text{より} \quad M_{\langle\sigma\tau\sigma\rangle} \supset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$$

$$[L : M_{\langle\sigma\tau\sigma\rangle}] = \langle\sigma\tau\sigma\rangle = 2, \quad [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3 \quad \text{より}$$

$$[L : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})] = 2 \quad \text{より} \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = M_{\langle\sigma\tau\sigma\rangle}$$

$$\text{したがって} \quad \sigma\tau(\omega) = \sigma\tau\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \omega \quad \text{より} \quad \mathbb{Q}(\omega) = M_{\langle\sigma\tau\rangle}$$

$$\tau(\alpha_2) = \alpha_3, \quad \sigma(\alpha_3) = \alpha_1 \quad \text{より}$$

$$\mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{3}) = M_{\langle\tau\rangle}, \quad \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{3}) = M_{\langle\sigma\rangle}$$

したがって 非自明な中間体は

$$\mathbb{Q}(\omega), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}), \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{3}), \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{3})$$

$$\parallel \\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$$