

3. 1. 18

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{-1} \quad \text{111}$$

$$\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{-1}$$

$$\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = -1$$

$$\alpha^2 + 3 = 2\sqrt{2}\alpha$$

$$\alpha^4 + 6\alpha^2 + 9 = 8\alpha^2$$

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 9 = 0$$

よって $x^4 - 2x^2 + 9$ が 最小多項式である。

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の \mathbb{Q} 上の基底として $\{1, \sqrt{2}\}$ がとれる。

また $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上の基底として $\{1, \sqrt{-1}\}$ がとれる。

したがって $\mathbb{Q}(\alpha)$ の \mathbb{Q} 上の基底として $\{1, \sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{-2}\}$ がとれる。

よって $\mathbb{Q}(\alpha)$ の次元は 4 である。

$x^4 - 2x^2 + 9$ が 最小多項式である。