6. 1. 11 (a) 「a が M の触点」…①,

「$a_\alpha \to a$ となるような M の有向点列 (a_α) が存在する」…② とおく

まず ② ⇒ ① を示す。 a を含む任意の開集合 O をとってくる。

O は a の近傍と言えるので ② より、適当に $\alpha_0 \in A$ をとれば

任意の $\alpha \in A$ について、 $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow a_\alpha \in O$ とできる

よって、(a_α) は M の有向点列より $a_{\alpha_0} \in M$ と言えるので $\emptyset \neq O \cap M \ni a_{\alpha_0}$

ゆえに ② ⇒ ①

次に ① ⇒ ② を示す。教科書のこの問題の補足より 点 a の近傍 V(a) を有向集合とみなす。 a は M の触点なので、 V(a) の任意の元 V に対して

$V \cap M \neq \emptyset$ よって 選択公理より

$a_V \in V\underline{\cap M}$ ← ここで∩Mとしたのは となる 有向点列 $(a_V)_{V \in V(a)}$ がとれる。

これが「Mの」点列となるために必要であったため 忘れないように。

この有向点列について a の任意の近傍 V' を与えたとする。

このとき $V' \supset V$ ($V' \leq V$) であるような $V \in V(a)$ について

$a_V \in V \cap M \subset V \subset V'$ が成り立つ。

つまり

$$\lim_{V(a)} a_V = a$$

ゆえに ① ⇒ ②

以上より 題意は示された。

(b) M が閉集合 ⟺ M の触点すべては M に属する

(a) より ⟺ M の有向点列の極限となるような点のすべては M に属する (らは 明確)