6.1.6 $(\mathcal{O}_{d_M})$ と $(\mathcal{O}_d)_M$ の基本近傍系が同じであることを示せばよい。

まず、明らかに $(\mathcal{O}_{d_M})$, $(\mathcal{O}_d)_M$ の $a \in M$ の基本近傍系として

$\{B(a;\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$, $\{B^*(a;\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ がとれる。

ただし、 $B(a;\varepsilon) = \{x \mid x \in M,\ d_M(x,a) < \varepsilon\}$

$B^*(a;\varepsilon) = \{x \mid x \in S,\ d(x,a) < \varepsilon\} \cap M$ とする。

ここで $\{x \mid x \in M,\ d_M(x,a) < \varepsilon\}$

$= \{x \mid x \in M,\ d(x,a) < \varepsilon\} \subset \{x \mid x \in S,\ d(x,a) < \varepsilon\}$ より

$\{x \mid x \in M,\ d(x,a) < \varepsilon\} \cap M \subset \{x \mid x \in S,\ d(x,a) < \varepsilon\} \cap M$

$\{x \mid x \in M,\ d(x,a) < \varepsilon\} \subset M$ より $B(a;\varepsilon) \subset B^*(a;\varepsilon)$

また、反対に $B(a;\varepsilon) \supset B^*(a;\varepsilon)$ であることは明らか。

よって $B(a;\varepsilon) = B^*(a;\varepsilon)$ となり

$(\mathcal{O}_{d_M})$ と $(\mathcal{O}_d)_M$ の任意の点 $a \in M$ に対する

基本近傍系は一致するので $(\mathcal{O}_{d_M}) = (\mathcal{O}_d)_M$ が示された。

※ ~~[redacted]~~ 位相 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ が一致したからといって、

基本近傍系が自明的に同じものがとれるとは限らない

ことには注意しよう。

例 $\mathbb{R}^n$ の基本近傍系のとり方には $\{B(a;\varepsilon)\}$ や

a を含む開区間全体などがとれるので、

必ずしも基本近傍系が一致するとは限らない。

(そうでもない)