

5.3.4

$(T_4) \Rightarrow (T_4)'$   $A$  の開集合,  $O$  の開集合で:  $A \subset O$  とする.

$$A^c \supset O^c \text{ かつ } A \cap O^c \subset A \cap A^c = \emptyset \text{ かつ } A \cap O^c = \emptyset$$

$$\text{よって } (T_4) \text{ かつ } A \subset O_1, O^c \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

とする開集合  $O_1, O_2$  が存在する

$$\text{よって } O_1 \cap O_2 = \emptyset \Leftrightarrow O_1 \subset O_2^c \text{ かつ } \overline{O_1} \subset O_2^c$$

$$O^c \subset O_2 \text{ かつ } O \supset O_2^c \text{ ではない} \quad \overline{O_1} \subset O_2$$

(したがって  $(T_4)'$  は 正しくない.)

$(T_4)' \Rightarrow (T_4)$   $A_1, A_2 \in \mathcal{Q}$  で  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  とする.

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Leftrightarrow A_2 \subset A_1^c \text{ かつ } (T_4)' \text{ かつ}$$

$$A_2 \subset O_2, \overline{O_2} \subset A_1^c \text{ かつ } \text{よって } O_2 \in \mathcal{O} \text{ が存在する}$$

$$\overline{O_2} \subset A_1^c \text{ かつ } \overline{O_2}^c \supset A_1 \Leftrightarrow O_2^{cc} \supset A_1 \text{ かつ}$$

$$\overline{O_2}^c \cap O_2 \subset \overline{O_2}^c \cap \overline{O_2} = \emptyset \text{ かつ } \overline{O_2}^c \cap O_2 = \emptyset$$

(したがって  $(T_4)$  は 正しくない.)