

4.3.9 まず $(*) \Rightarrow \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ を示す.

$O_1 \in \mathcal{O}_1$ であり 任意の $x \in O_1$ について考える.

O_1 は x の近傍 $\frac{\varepsilon}{3}$ なのだから $x \in V \subset O_1$ となる $V \in \mathcal{V}^*(x)$ が存在する.

$(*)$ の条件より $x \in W \subset V \subset O_1$ となる $W \in \mathcal{W}^*(x)$ が存在する.

つまり O_1 は位相 \mathcal{O}_2 において x の近傍になっているのである.

$O_1 \in \mathcal{O}_2$ であるから $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$

次に $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow (*)$ を示す.

$V \in \mathcal{V}^*(x)$ をとるとすると $x \in O_1 \subset V$ となる $O_1 \in \mathcal{O}_1$ が存在する.

仮定より $O_1 \in \mathcal{O}_2$ であるから O_1 は \mathcal{O}_2 における x の近傍系なのだから

$W \subset O_1$ となる $W \in \mathcal{W}^*(x)$ が存在する.

つまり $W \subset O_1 \subset V$ である. 題意は示された.