

4.3.2

(i) 「 N_i は $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群である」... ① $n=1$ (に関する) 数学的帰納法で示す. (ind 条件 $n \geq 2$)

(i) $n=2$ のとき $i=1$ とする. 明らかに $E \in N_1 \therefore \textcircled{A}$ である.

$A, B \in N_1$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{C}) \text{ とする.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad AB \in N_1 \therefore \textcircled{B}$$

$$\text{また} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{である} \quad A^{-1} \in N_1 \therefore \textcircled{C}$$

$\textcircled{A} \sim \textcircled{C}$ より $n=2$ のとき ① は成り立つ.

ii) $2 \leq n \leq k$ のとき ① は成り立つと仮定する.

$n=k+1$ のとき

明らかに

$E \in N_i(k+1) \therefore \textcircled{A}'$ である.

$$A = \begin{pmatrix} E_i & A'_{i(k+1-i)} \\ O_{(k+1-i)i} & A''_{(k+1-i)(k+1-i)} \end{pmatrix},$$

\times $GL_{k+1}(\mathbb{C})$ の部分集合 N_i は $N_i(k+1)$ で表すことができる.

ここで E_i は i 次単位行列, $O_{(k+1-i)i}$ は $(k+1-i, i)$ 型の零行列

$A''_{(k+1-i)(k+1-i)} \in N_i(k+1-i)$ (ここで $k+1-i \leq k$ のときは $A''_{(k+1-i)(k+1-i)} = E_{(k+1-i)}$ とおける) である.

$A'_{i(k+1-i)}$ は $(i, k+1-i)$ 型行列 である. したがって

$$\text{同様に} \quad B = \begin{pmatrix} E_i & B'_{i(k+1-i)} \\ O_{(k+1-i)i} & B''_{(k+1-i)(k+1-i)} \end{pmatrix} \quad \text{と表す.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} E_i & B'_{i(k+1-i)} + A'_{i(k+1-i)} B''_{(k+1-i)(k+1-i)} \\ O_{(k+1-i)i} & A''_{(k+1-i)(k+1-i)} B''_{(k+1-i)(k+1-i)} \end{pmatrix}$$

帰納法の仮定より $X_{(k+1-i)(k+1-i)} \in N_i(k+1-i)$ を用いて.

$$X_{(k+1-i)(k+1-i)} = A''_{(k+1-i)(k+1-i)} B''_{(k+1-i)(k+1-i)} \text{ とおける.}$$

$$A_{i(k+1-i)}^* = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k+1-i \\ i \end{matrix}$$

$$B_{(k+1-i)(k+1-i)}^{**} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ & \ddots & & & * & * \\ & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i-1 & k+1-2i \\ i-1 \end{matrix}$$

$$A_{i(k+1-i)}^* B_{(k+1-i)(k+1-i)}^{**} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k+1-i \\ i \end{matrix}$$

$$B_{i(k+1-i)}^* + A_{i(k+1-i)}^* B_{(k+1-i)(k+1-i)}^{**} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k+1-i \\ i \end{matrix}$$

$$\text{f.2 } A, B \in N_i(k+1) \Rightarrow AB \in N_i(k+1) \dots \textcircled{B}'$$

帰納法の仮定より $A^{**^{-1}}_{(k+1-i)(k+1-i)} \in N_i(k+1-i)$ が存在する

$$\begin{pmatrix} E_i & -A_{i(k+1-i)}^* A^{**^{-1}}_{(k+1-i)(k+1-i)} \\ 0_{(k+1-i)i} & A^{**^{-1}}_{(k+1-i)(k+1-i)} \end{pmatrix} \in N_i(k+1) \text{ となる。}$$

$$A \begin{pmatrix} E_i & -A_{i(k+1-i)}^* A^{**^{-1}}_{(k+1-i)(k+1-i)} \\ 0_{(k+1-i)i} & A^{**^{-1}}_{(k+1-i)(k+1-i)} \end{pmatrix} = E \quad \text{となる。}$$

$$A \in N_i(k+1) \Rightarrow A^{-1} \in N_i(k+1) \dots \textcircled{C}'$$

$\textcircled{A}', \textcircled{B}', \textcircled{C}'$ より $n = k+1$ のときも \textcircled{A} は成り立つ。