

2.5.6

(1)  $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$  とき、共役  $P$  が存在する

$$PAP^{-1} = B \quad (P \in GL_2(\mathbb{R})) \text{ が存在する}$$

すなわち 必要条件として、 $PA = BP$  とある  $P$  が存在する

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおくと、}$$

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \quad \text{となる。}$$

$$\begin{cases} a+b = b \\ c = a+c \\ c+d = b+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c \end{cases}$$

$P \in GL_2(\mathbb{R})$  である条件  $\Leftrightarrow$  行列  $P$  の逆行列が存在する、すなわち  $\det P \neq 0$

$$\therefore P \in GL_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \det P \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{すなわち} \begin{cases} a=0 \\ b=c \\ ad - bc \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c \neq 0 \end{cases} \quad \text{このとき } P \text{ が } GL_2(\mathbb{R}) \text{ に存在する。}$$

実際  $P$  と  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とおくと、 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  である。

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B \quad \text{となる。}$$

すなわち 題意は示された。

(2) (1) の結果を用いて  $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$  とき、共役  $P$  が存在する

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c \\ -b^2 = 1 \end{cases} \quad \text{このとき実数 } a, b, c, d \text{ が存在する}$$

(b.c.)  $b \in \mathbb{R}$  と  $-b^2 = 1$  は矛盾する。

(c.f.d.) 題意は示された。

(3) (2) の結果を用いて  $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$  とき、共役  $P$  が存在する

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c = \pm i \end{cases}$$

$$\zeta = \tau \quad P = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{逆行列} \quad \det P = 1 \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tau^{-1}$$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

よって

題意は満たす。

※ 分母がゼロになる  $P$  を  $\tau$  を使って計算しているが、同値条件  $\tau \neq 0$  の  
 解答としては 実際には  $\tau \neq 0$  を使って計算するのは  $\tau \neq 0$  である。