

2.9.2

ϕ の G_1 への制限 $\phi_1 \in \text{Aut}(G_1)$.

$g \in G_1$ に対して $\phi_1(g) \in G_1$ である。

また $\phi_1(g) \in G_1 \times G_2$ である。

$$\phi_1(g) = (g_1, g_2) \quad g_1 \in G_1, \quad g_2 \in G_2 \text{ である。}$$

$|G_1| = n_1$. ϕ は準同型だから $\phi_1(g)$ の位数は g の位数の約数

である。 g の位数は n_1 の約数だから $\phi_1(g)$ の位数は n_1 の約数である。

$$\text{すなわち} \quad \{\phi_1(g)\}^{n_1} = (1_{G_1}, 1_{G_2}) \quad \text{である。}$$

$$(g_1^{n_1}, g_2^{n_1}) = (1_{G_1}, 1_{G_2})$$

したがって g の位数は n_1 の約数であり $g_1^{n_1} = 1_{G_1}$ である。

$$(1_{G_1}, g_2^{n_1}) = (1_{G_1}, 1_{G_2})$$

$$\Leftrightarrow g_2^{n_1} = 1_{G_2}$$

$\Leftrightarrow g_2$ の位数は n_1 の約数。

よって $n_2 = |G_2|$, $G_2 \ni g_2$ に対して g_2 の位数は n_2 の約数である。

n_1, n_2 は互いに素だから n_1, n_2 の最小公倍数は $|G|$. $g \in G$

$$\text{すなわち} \quad \phi_1(g) = (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \text{ である。}$$

よって $\phi_1: G_1 \rightarrow G_1$, $\phi_1(g) = \phi(g, 1_G)$ が定義できる。

同様にして $\phi_2: G_2 \rightarrow G_2$, $\phi_2(g) = \phi(1_{G_1}, g)$ が定義できる。

よって $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ に対して ϕ は準同型である。

$$\begin{aligned} \phi(g_1) \phi(g_2) &= \phi(g_1, 1_{G_2}) \phi(1_{G_1}, g_2) \\ &= \phi(g_1, g_2) \end{aligned}$$

したがって 題意は示された。