

2.10.5 (1)  $G$  の指数 2 の部分群を  $H$  とおく。

問題 2.10.4 (1)  $H \supset 2G$

非.  $2G$  は正規部分群ではない (証明略) 定理 2.10.2 (1)

$H$  と  $G/2G$  の部分群は 1 対 1 対応する。

したがって対応するものは  $H$  に対し  $H/2G$  であり

定理 2.10.4 (1)

$$(G/2G)/(H/2G) \cong G/H \quad \text{ではない}$$

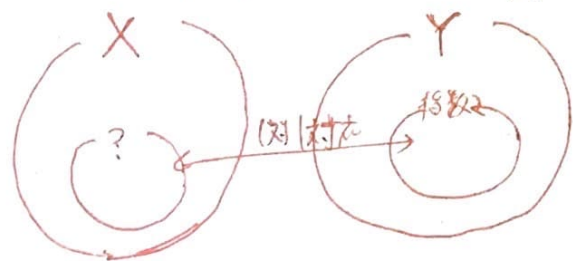
$$|G/H| = 2 \text{ から } |(G/2G)/(H/2G)| = 2 \text{ ではない}$$

したがって  $H/2G$  は指数 2 の部分群ではない。

したがって  $H$  と  $G/2G$  の指数 2 の部分群は 1 対 1 対応する。

✗ 本当は 定理 2.10.2 (1)

~~指数 2 の部分群の集合~~  
 $G$  の  $2G$  を含む部分群の集合  $Y$   
 $\uparrow$  1 対 1 対応  
 $G/2G$  の部分群の集合  $X$  ではない



今の現状

図解のとおりでは ~~指数 2 の部分群の集合~~  $Y$  の中で指数 2 とする部分集合に 対応するのは

例題 2.10.12 では ~~指数 2 の部分群の集合~~  $X$  の中で指数 2 とする部分集合であることが示されているので不十分である。  $? =$  指数 2 の部分集合なのか? という点。

確かに  $|H/2G| = 2 \Rightarrow |(G/2G)/(H/2G)| = 2$  により示すことはできるが、逆に  $2 = |(G/2G)/(H/2G)| \Rightarrow 2 = |H/2G|$  を示す必要がある。

例題 2.10.12 は不十分である。以下その証明をかく。

対偶を示す (1)  $|H/2G| = k$  ( $k \neq 2$ ) ( $k$  は  $\infty$  とする) と仮定。  
 定理 2.10.4 (1)  
 $(G/2G)/(H/2G) \cong G/H$   
 したがって 題意は示される。

よって  $G/2G \cong (2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}) / (2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}) \cong (2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  の

自分で書いた例題 2.10.12 の解説

指数 2 の部分群 (示す部分) がある。

このからの議論は 例題 2, 10, 12 と全く同じなの

結果

求める数は 37 であることが分かる

$$13\overline{a} = \overline{0}$$

$$\overline{a} = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$6, 7, 8$$

(4) (1) と同様にして, HEG の指数 13 の部分群を求め

$$H \text{ は } G / 13G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (13\mathbb{Z} \times 13\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z} / 13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} / 13\mathbb{Z}) \text{ の}$$

指数 13 の部分群に対応する。

2(7).  $(\mathbb{Z} / 13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} / 13\mathbb{Z})$  の指数 13 の部分群は, ラグランジュの定理より,  
位数 13 の部分群と等しい。

13 は素数より, それは位数 13 の元の巡回群である。

$(\mathbb{Z} / 13\mathbb{Z})^2$  の元は単位元を除いて  $13 \times 13 - 1$  個あり。

それはすべて位数 13 の元である。

$$\text{例として } (a, b) \in (\mathbb{Z} / 13\mathbb{Z})^2 \text{ として}$$

$$a, b \in \mathbb{Z} / 13\mathbb{Z} \text{ として}$$

$$13(a, b) = (13a, 13b) = (\overline{0}, \overline{0})$$

と 37 として利用すれば示せる。(証明略)

$$\frac{13 \times 13 - 1}{12} = \frac{12 \cdot 14}{12} = 14 \text{ 通り}$$

位数 13 の元の巡回群は 14 個作れるから

求める数は 14 である。

証明は略したが、

同様にして、

~~位数 13 の元の巡回群は~~

~~位数 13 の元の巡回群は~~

$A \times B \times C \cdots$  の元の位数は

$\text{lcm}(|A|, |B|, |C|, \dots)$  の約数  
であることが示せる。