

4.5.8

(1)  $\Sigma$  の 2 部分群の数を  $s$  とおく.  $s \equiv 1 \pmod{2}$ また  $|G/H| = 3$  より  $s$  は 3 の約数である.  $s = 1, 3$ 

これは条件より

 $s = 1, 3$  だけ考えられる. $s = 1$  のとき, これは  $H \triangleleft G$  を意味する.  $G$  は単純群である. $s = 3$  のとき, 任意の  $g, g' \in G$  を用いて,  $H$  の共役の集合

$$\{H, gHg^{-1}, g'Hg'^{-1}\} \text{ が成り立つ.}$$

この集合に  $G$  が共役作用による作用を作用させる.

置換表現

$$\rho: G \rightarrow S_3 \text{ が存在する.}$$

 $\rho$  は準同型より  $\ker \rho$  は正規部分群である.

これは自明でない正規部分群であることは示せばよい.

$$\ker \rho \ni k \text{ とすると } k \cdot H = kHk^{-1} = H \text{ である. } k \in N_G(H)$$

$$\text{よって } N_G(H) \supset \ker \rho, \quad s = \frac{|G|}{|N_G(H)|} \text{ より } |N_G(H)| = 8 \text{ である.}$$

$$N_G(H) \neq G \text{ である. } \ker \rho \neq G$$

$$\text{したがって } \ker \rho \neq \{1\} \text{ である.}$$

(2)  $\Sigma$  の 3 部分群の数を  $t$  とおく. 先ほどと同様に  $t \equiv 1 \pmod{4}$  だけ考えられる. $t = 1$  は単純群である.  $t = 4$  と  $t = 5$  である. $t = 4$  とするとき,  $\Sigma$  の 3 部分群は  $\Sigma$  の 4 部分群である. 異なる 3 部分群は互いに素な元 (共通元) を持つ.  $G$  の元の 3 部分群に使われない元の数は

$$24 - (3-1)4 - 1 = 15$$

これは 3 部分群に使われる.  $15 < (3-1)3$  より  $t = 5$  である. $h \neq 1$  であり  $h \in H \cap gHg^{-1}$  であり  $h \in H \cap g'Hg'^{-1}$  である.  $h$  が存在する.これは  $h \in H \cap gHg^{-1}$  である. 明らかに  $hHh^{-1} = H$ ,  $h(gHg^{-1})h^{-1} = gHg^{-1}$  である.よって  $\rho(h) = 1$  である.  $h \in H \cap g'Hg'^{-1}$  のときも同様である.

$$\text{よって } h \in \ker \rho \text{ であり } h \neq 1 \text{ より } \ker \rho \neq \{1\}$$

(7.6.5)  $\ker \rho$  は自明でない正規部分群である. 題意は示された.

(2)  $G$  は位数 36 の部分群,  $G$  の 10-2 部分群, 10-3 部分群それぞれ  $H, K$ , 非それの数それぞれ 5, 6 とおく. (1) と同様にして  $S = 3, 9$ ,  $t = 4$  を繰り返す ( $5 \neq 1, 6 \neq 1$  と (1) の場合)

$S = 3$  とおくと, 少なくとも  $G$  の 10-2 部分群に属する元は

$$36 - 4 - (3-1) = 30 \text{ あり } 30 \text{ 以下である. (30 に単位元は含まれない)}$$

30 は 10-3 部分群の元すべて異なる (1) と (2) のそれぞれに属する元の個数 (単位元除く) は

$$(9-1)4 = 32 \text{ あり 小さい. 少なくとも一つ, 異なる 2 つの 10-2 部分群で}$$

単位元以外に共通する元がある.  $k \in K$  が,  $|K|$  と共役な  $gkg^{-1}$  ( $g \in G$ )

( $K \neq gkg^{-1}$ ) 単位元以外の共通する元とすると,  $k \in K \cap gkg^{-1}$  で  $k \neq 1$

∴  $G$  が  $K$  の共役集合で共役により作用するとする.

置換表現  $\rho: G \rightarrow S_4$  が定まる.

$\rho$  は準同型 あり  $\ker \rho$  は正規部分群

(1) と同様にして  $\ker \rho \neq \{1\}$  を示せばよい.

$\rho(k)$  について考え,  $x_1 = k, x_2 = gkg^{-1}$  とおく.

$kx_1 = x_1, kx_2 = x_2$  あり  $\rho(k)(1) = 1, \rho(k)(2) = 2$  である.

∴  $\rho(k) = (34), 1$  である.

$\rho(k) = 1$  のときは  $k = 1$ .  $k' \in \ker \rho$  あり  $\ker \rho \neq \{1\}$

また,  $\rho(k) = (34)$  のときは,  $\rho(k^2) = 1$ .

∴  $k \neq 1$ ,  $k \in K$  あり  $k$  は位数が 3 の倍数である.  $k^2 \neq 1$  である.

∴  $k^2 \in \ker \rho$  かつ  $k^2 \neq 1$  となり,  $\ker \rho \neq \{1\}$

(1) 及び 題意は示された.

(2)  $G$  は位数 48 の群,  $G$  の  $10-2$  部分群  $H$ ,  $10-3$  部分群  $K$  がある。

1)  $10-2$  部分群の数を  $S$ ,  $10-3$  部分群の数を  $T$  とおく。

(1) と同様にして  $S=3$ ,  $T=4, 16$  以降は  $(S, T) \neq (1, 1)$

$(=4, 3)$  である。  $10-3$  部分群に使われていない元の数は,  $K$  は  $\llcorner$  同群なので

$$48 - (3-1) \cdot 4 - 1 = 39 \quad (39 \text{ に単位元を除く})$$

異なる  $10-2$  部分群の元が単位元以外すべて異なるから

$10-2$  部分群に使われる元の数 (単位元を除く) は  $(16-1) \cdot 3 = 45$

$39 < 45$  より 矛盾が生じる。異なる  $10-2$  部分群の少なくとも 2

個目は単位元以外の共通の元を持つ。 ①

よって,  $G$  が  $H$  の共役の集合に共役により作用する。

$S=3$  より 置換表現  $\rho: G \rightarrow S_3$  が定まる。

$\rho$  は準同型より  $\ker \rho$  は  $G$  の正規部分群である。

(1) と同様にして  $\ker \rho \neq G$  である。  $\ker \rho \neq \{1\}$  である。

$S=3$  より  $H$  と共役の集合  $\{H, gHg^{-1}, g'Hg'^{-1}\} (g, g' \in G)$  である。

① より  $h \neq 1$   $h \in H \cap gHg^{-1}$  である  $h$  が存在する。

ゆえに 明らかに  $hHh^{-1} = H$ ,  $hgHg^{-1}h^{-1} = gHg^{-1}$  である。  $\rho(h) = 1$

より  $h \in \ker \rho$  である  $h \neq 1$  より  $\ker \rho \neq \{1\}$

よって 題意は示された。

~~解答~~ [別解] 別の解法

$\ker \rho$  を考える。  $\ker \rho \neq G, \{1\}$  である。

$\ker \rho = G$  のときは  $H$  が正規部分群であるが矛盾。

$\ker \rho = \{1\}$  のときは  $\rho$  は単射になる。  $|G| \leq |S_3|$  である。

明らかに  $|G| > |S_3|$  より 矛盾。

よって 題意は示された。