

4.2.2.

(1) Young 図形を考えて完全代表系は

$\{1_G, (12), (12)(34), (123), (123)(45), (1234), (12345)\}$

とる。

(2)

$\{1_G\}$

明らかに A_5 の共役類である。

また型が $(2, 1, 1, 1)$ の置換 (互換), 型が $(3, 2), (4, 1)$ の元は A_5 に含まれない。その共役類は考えなくていい。

よって A_5 の型が $(2, 2, 1), (3, 1, 1), (5)$ の元 $a \in A_5$ の共役類を考えよう。

まず型が $(2, 2, 1)$ のものにだけ考えよう。(P100)

型が $(2, 2, 1)$ の置換について 例題 4.2.9 のように $(123), (132) \in A_5$ で

$(123)(12)(34)(132) = (23)(14), (321)(12)(34)(123) = (31)(24)$ であり

型が $(2, 2, 1)$ の置換で S_5 に不変に保たれるのは $(12)(34)$ と共役である。

$(2, 2, 1)$ の置換で S_5 に不変に保たれないものは

$(i_1, i_2)(i_3, 5)$ (ただし i_1, i_2, i_3 は 1 以上 4 以下の自然数で互いに異なる)

と表される。

$$= A_{\Sigma} \quad (i_1 \ i_2) (i_3 \ i_4) \in A_4 \text{ により}$$

$$(i_1 \ i_2) (i_3 \ i_4) \{ (i_1 \ i_2) (i_3 \ i_4) \} \{ (i_1 \ i_2) (i_3 \ i_4) \}^{-1} \\ = (i_1 \ i_2) (i_3 \ i_4) \quad \text{となり}$$

A_4 の SE 不変に保たない任意の置換は、 SE 不変に保つ置換の
おとつと共役である。

したがって、 $(12)(34)$ を代表元とす共役類は A_5 の型 $(2, 2, 1)$ の集合である。

次に型が $(3, 1, 1)$ のものについて考えよ。

そのために、 (123) を代表元とする共役類の位数を計算しよう。

(123) の安定化群を考えよ。

$$A_5(123) \ni \sigma \text{ に対し} \quad \sigma(123)\sigma^{-1} = (123)$$

$$(\sigma(1) \ \sigma(2) \ \sigma(3)) = (123)$$

$$\text{置換の分解が} \quad (\sigma(1) \ \sigma(2), \sigma(3)) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)$$

A_5 の元の符号は 1 である。

$$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (1, 2, 3) \text{ のとき}$$

$$= (3, 1, 2) \text{ のとき}$$

$$= (2, 3, 1) \text{ のとき}$$

$$\sigma = \text{id} \in A_5$$

$$\sigma = (132) \in A_5$$

$$\sigma = (123) \in A_5$$

$$\text{したがって} \quad A_5(123) = \{ \text{id}, (123), (132) \} \text{ である。}$$

よって (123) を代表元にと A_5 の共役類の位数は

$$\frac{|A_5|}{3} = \frac{5!}{3} = 20$$

よって $(3, 1, 1)$ 型の A_5 の元の個数も 20 個である。

A_5 の型が $(3, 1, 1)$ の共役類の代表元は (123) である。

最後に型が (5) のものについて考えよ。

そのために (12345) の安定化群を計算しよう。

$$A_5(12345) \ni \sigma \text{ に対し} \quad \sigma(12345)\sigma^{-1} = (12345)$$

$$(\sigma(1) \ \sigma(2) \ \sigma(3) \ \sigma(4) \ \sigma(5)) = (12345)$$

$$\text{置換の分解が} \quad (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)) = (1, 2, 3, 4, 5), (5, 1, 2, 3, 4) \\ (4, 5, 1, 2, 3), (3, 4, 5, 1, 2) \\ (2, 3, 4, 5, 1)$$

$$\text{よって} \quad \sigma = \text{id}, (15432), (14253), (13524), (12345)$$

$$\text{よって} \quad |A_5(12345)| = 5 \text{ であり} \quad (12345) \text{ を代表元にと} \quad A_5 \text{ の共役類の位数は}$$

$$\frac{|A_5|}{5} = 12$$

また A_5 の他の (5) 型の置換に関する (7) も同様に $\sigma \in A_5$ である。

例: (121345) について。

$$\exists \sigma \in A_5 \quad \sigma(12345)\sigma^{-1} = (21345) \text{ など}$$

$$(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5)) = (21345) \text{ など}$$

置換の分解

$$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)) = (2, 1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 5, 2), (1, 3, 4, 5, 2, 1), (4, 5, 2, 1, 3), (5, 2, 1, 3, 4)$$

ここで $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)) = (2, 1, 3, 4, 5)$ のときは

$$\sigma = (21) \notin A_5 \text{ など}$$

この置換のみでは、

$\sigma \notin A_5$ のため

$\sigma(12345)\sigma^{-1}$ のように作用させてみた元を

探してみよう。

他の場合についても同様に $\sigma \notin A_5$ となる。

$$(121345) \text{ と } (12345) \text{ は共役ではない。}$$

次に

$$\text{型が (5) の共役類の代表元は } (21345) \text{ と } (12345) \text{ である。}$$

11-から、求める代表元は

$$\{1, (12)(34), (123), (12345), (21345)\}$$

G_5 の共役類と一致 (11) である (12345) , (21345) を代表元とする共役類がある。