

4.6.7

$$L = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle,$$

F を四元数群 とす。

P31 より $|F| = 8$ で $j, k \in F$ について

$$P32 \text{ の群表より } j^4 = k^4 = 1, \quad j^2 = k^2,$$

$$jkj^{-1} = jk(-j) = j(-k) = -k = k^{-1}$$

$$\text{より, } jk = i, \quad j^2 = -1 \text{ あり}$$

j, k が F の生成元になることは明らか

よって L が F の全射準同型が存在する

ゆえに $|L| \geq 8$ である。

$$L \text{ について } x^4 = 1, \quad yxy^{-1} = x^{-1} \text{ あり}$$

$$yx = x^3y$$

この等式を使うことで L の元は $x^i y^j$ ($i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$) の形

にかけらる。

さらに $x^2 = y^2$ より $i \geq 2$ のときは $x^i y^j$ を $i < 2$ の形にかきかえられ。

よって L には $i < 2$ の 8 個の元しかない。ゆえに $|L| \leq 8$

先の議論を合わせて $|L| = 8 = |F|$ で、全射準同型が存在し

$$L \cong F$$