

4.1.9. (1) \mathbb{R} の安定化群は

$$G_{\mathbb{R}} = \{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A\mathbb{R} = \mathbb{R} \}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (\text{ただし } ad - bc \neq 0) \quad \text{と} \quad \mathbb{R}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とみたとき} \quad \text{方程式 } A\mathbb{R} = \mathbb{R} \text{ となる}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad a=1, c=0$$

よって $d \neq 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (b, d \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow A\mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$A_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R}, d \neq 0 \right\}$$

逆の条件にも注意。一般に $A\mathbb{R} = \mathbb{R} \quad (A \in GL_2(\mathbb{R}))$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad d \neq 0 \quad \text{からなり、}$$

次に 逆も成り立つことを示す、

(2)

$$G \cdot X = \{ AX \mid A \in GL_2(\mathbb{R}) \}$$

(1) と同様様に $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad (ad - bc \neq 0)$$

よって

$$G \cdot X = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

よって

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\} \text{ とおける.}$$

明らかに

$$G \cdot X \supset G_1 \quad \text{である.}$$

逆に

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

 $ac \neq 0$

1. 2. 3.

 $b=0, d \neq 0$ 3. 満たす実数 b, d 1. 2.

$$ad - bc = ad \neq 0 \quad \text{が成り立つ.}$$

よって

$$G \cdot X \subset G_1 \quad \text{である.} \quad G \cdot X = G_1$$

(7.3.7)

$$G \cdot X = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$