

2.6.1

まず反射律について調べる。

$a \in \mathbb{R}$ とする。

$$(a, a) \in \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{より}$$

$$(a, a) \in R.$$

したがって R は反射律を満たす。

次に対称律について調べる。

$(a, b) \in R$ とする。 $w \in \mathbb{R}$ が存在して次の3つの場合の少なくとも一つが成り立つ。

$$(i) \quad a = w, \quad b = w \quad (ii) \quad a = w, \quad b = 2w \quad (iii) \quad a = 2w, \quad b = w$$

(i) が成り立つとき、 $b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ で $b = a = w$ より

$$(b, a) \in \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{が成り立つので} \quad (b, a) \in R.$$

(ii) が成り立つとき、 $(b, a) \in \{(2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (b, a) \in R$

(iii) が成り立つとき、 $(b, a) \in \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (b, a) \in R$

よって (i) \vee (ii) \vee (iii) より $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

したがって R は対称律を満たす。

最後に、推移律について調べる。

$$(1, 2), (2, 4) \in R \quad \text{であるが}$$

$(1, 4) \notin R$ であるので R は推移律を満たさない。

したがって R は \mathbb{R} 上の同値関係ではない。