

4.1.7 n に関する数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のときは

(ii) $n=2$ のときは $\|y\| = c$ のとき ($c \in \mathbb{R}, c \geq 0$) $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対し

$$c \neq 0 \text{ のときは } A = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{c} & \frac{y_2}{c} \\ -\frac{y_2}{c} & \frac{y_1}{c} \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

$$|A| = \frac{y_1^2}{c^2} + \frac{y_2^2}{c^2} = 1 \quad A^{-1} = A^T \text{ より } A \in SO(2) \text{ となる。}$$

$$Ay = \begin{pmatrix} \frac{y_1^2}{c} + \frac{y_2^2}{c} \\ -\frac{y_1 y_2}{c} + \frac{y_1 y_2}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

y と $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ は同一軌道に属するので $\|Ax\| = \|y\| = c$ のとき。

推移律から

x と y は同一軌道に属する。

$c=0$ のときは

明らかに成り立つ。

よって

$n=2$ のときは 成り立つ。

(iii) $1 \leq n \leq k$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$) のときは 題意が成り立つと仮定。

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{k-1} \end{pmatrix} \text{ に対し } \|y'\| = c' \text{ とおく。}$$

$$\begin{pmatrix} c' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A' y' \text{ となるように } A' \in SO(k) \text{ が存在する。}$$

$n=k+1$ のときは

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & A' \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & A'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & A'^T \end{pmatrix} \text{ となる。 } A^T A = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & E \end{pmatrix} = E \text{ となる。}$$

$$|A| = |1| |A'| = 1 \text{ となるので } A \in SO(k+1) \text{ となる。}$$

よって

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & A'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ c' \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

(iv) $n=2$ のときは 成り立つ。

$$y'' = \begin{pmatrix} y_1 \\ c' \end{pmatrix} \text{ に対し } \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = A'' \begin{pmatrix} y_1 \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\text{となる。 } c = \sqrt{y_1^2 + c'^2} = \|y''\| \text{ となるので } A'' \in SO(2) \text{ が存在する。}$$

そこで

$$B = \begin{pmatrix} A'' & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{と 考えよう}$$

先ほどと同様にして

$B \in SO(k+1)$ であることが示せる。

$$BAy = \begin{pmatrix} A'' & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{となる。}$$

$SO(k+1)$ は 群 である。

$BA \in SO(k+1)$ である。

よって

$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ と y は 同一軌道に属している。

$n = k+1$ のときは 題意は成り立つ。

題意は示された。

さらに $x \sim y$ であることが

x を 計算機上の θ に 固定して

示すという手法は \mathbb{R}^n 上で有効である。

(i) ~ (iv) の