

4.7.2 G の 3-部分群を H , 7-部分群を K , 3-3, 3-7 部分群の数をそれぞれ s, t とする.

3- の定理より s は 7 の約数より $s \equiv 1 \pmod{3}$

(12 の約数より $t \equiv 1 \pmod{7}$)

よって $s = 1, 7 \quad t = 1$ のみ考え.

(1) $s=1$ とすると $H, K \triangleleft G, H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, K \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ より $H \cap K = \{1\}$

よって HK は 部分群で $HK \supset H, K$ より $G = HK$

よって 定理 2.9.2 より $G \cong H \times K \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

これは G が 非可換群であることに矛盾するので $s \neq 1$

よって $s=7, t=1$ のみ考え.

よって $\text{Aut } K$ について調べる. $\text{Aut } K$ の元は $k \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ より, 生成元の行き先によって決定される.

逆に, $k \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ より $k \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ と対応する K の自己準同型 f により

$f(i) = \bar{c} \quad (0 \leq i \leq 6)$ とする. $c \neq 0$ のときのみ f は自己同型である.

よって $\text{Aut } K = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{6}\}$ とみなせる.

この群の演算は $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の通常の積の演算と一致 (7 で割った剰余) である. $\text{Aut } K$ は可換で,

$|\text{Aut } K| = 6$ である.

よって 写像 $\phi: H \rightarrow \text{Aut } K$ を $h \in H$ により $\phi(h)(k) = hkh^{-1} \quad (k \in K)$ と定める.

$|H| = 3$ より $\text{Im } \phi$ は位数が 3 以下の部分群である.

$|\text{Im } \phi| = 1$ とすると 任意の $h \in H, k \in K$ に対して $hk = kh$ となり, $G = HK$ より

これは 非可換条件に矛盾.

$|\text{Im } \phi| = 2$ とすると $\text{Im } \phi$ は位数 2 の元が存在するが, 演習 2.5.3 (1) より矛盾.

よって $|\text{Im } \phi| = |H| = 3$ とする.

$\text{Aut } K = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{6}\}$ とみなせる. $\text{Aut } K$ の位数 3 の元は $\bar{2}, \bar{4}$ により生成される. $\text{Im } \phi = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$

$|\text{Im } \phi| = |H|$ より H は全射である. $K = \langle k \rangle$ とおくと,

$\exists h \in H, hkh^{-1} = k^2$ であり, 明らかに $h \neq 1$ である.

よって h, k は $k^7 = h^3 = 1, hkh^{-1} = k^2$ を満たすのである.

$L = \langle x, y \mid x^7 = y^3 = 1, yxy^{-1} = x^2 \rangle$ の全射自己同型が存在する.

演習 4.6.5 の (3) より $|L| = |G| = 21$ である.

$G \cong L$ が示される.

題意は示された.

教科書のヒントに従って 2 回解く.

1) $h \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の作用を調べる.

$$\begin{aligned} hkh^{-1} &= k^c & (c=1,2,6) \\ k^c &= k^{c^2} & \text{7 は 0 mod 7} \\ k^{c^{2^2-1}} &= 1 & (k \in G \text{ の任意元}) \\ c^{2^2-1} &\equiv 0 \pmod{7} & (x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$c^2 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

$c=1$ とすると $G = HK$ より 可換性に矛盾.

1.2

$$C^2 + C + 1 \equiv 0$$

$$C^2 + C - 6 \equiv 0$$

$$(C+3)/(C-2) \equiv 0$$

$$C = 2, 4$$

$$C = 4 \wedge \{ \}$$

このようにして

$$hkh^{-1} = k^4 \quad \text{とすると}$$

$$(h^2)k(h^2)^{-1} = k^2 \quad \text{となる} \quad h \text{ の作用に対して } h^2 \text{ は } k \text{ を } k^2 \text{ に写す。}$$

$$hkh = k^2 \quad \text{とすると } h, k \text{ は } k \text{ を } k^2 \text{ に写す。}$$