

2.5.8 (1)  $ab = aba a^{-1}$  で  $a^{-1}, a \in G$  1) 題意は示す。17:

(2)  $ab$  の位数が有限の時,  $ab$  の位数  $n \in \mathbb{N}$  かつ  $(ab)^n = 1_G$

$$\underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ 回}} = 1_G$$

$$a \underbrace{(ba)(ba) \cdots (ba)}_{n-1 \text{ 回}} b = 1_G$$

$$a(ba)^{n-1}b = 1_G$$

$$(ba)^{n-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$(ba)^{n-1} = (ba)^{-1}$$

$$(ba)^n = 1_G$$

よて  $ba$  の位数  $\leq n'$  とおくと  $n$  は  $n'$  で割り切れるから  $n \geq n'$

同様に  $n \leq n' \in \mathbb{N}$  であるから  $n = n'$  となり

$ab$  と  $ba$  の位数は等しい。

$ab$  の位数が無限大で、 $ba$  が有限位数  $n' \in \mathbb{N}$  とおくと、先ほどの議論により

$$(ba)^{n'} = 1_G$$

$$(ab)^{n'} = 1_G \quad \text{となり}$$

これは  $ab$  の位数が無限大であることに矛盾する。ゆえに  $ba$  の位数も無限大である。

(1) から 題意が示された。