

[81 解]

条件式より

$$xy^3x = y$$

$$y = xy^3x$$

$$\therefore y^2 = (xy^3x)^2 = xyx = y^3 \quad \text{よって } y = 1$$

4.6.3

$y \neq 1$ とすると $y^5 = 1$ より y の位数は 5 で割り割り $|G|$ は 5 の倍数

$x^{-1} = x$, $y^{-1} = y^4$ より G の元は x, y の 4 文字で表現される

語で表される。また $xyx = y^2 \Leftrightarrow xy = y^2x$ より

y の左に x があっても、 y の右に x があってもかきかえられる。

G の元は x が y の右に 0 回か 1 回か表せる。

$$x^2 = y^5 = 1 \quad \text{より}$$

G の元は $y^j x^i$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, i = 0, 1$) と表せる。

よって

$$|G| \leq 10 \quad \text{である。}$$

よって

$$|G| = 5, 10 \quad \text{でなければならない。}$$

$|G| = 5$ とすると

$G = \langle y \rangle$ となり $x = y^j$ ($j = 0, 1, \dots, 4$) が成り立つ。

$x^2 = 1$ であるためには $x = 1$ である必要がある。

$$\text{よって } xyx = y^2 \quad \text{は}$$

$$y = y^2 \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{となり}$$

これは $y \neq 1$ に矛盾する。

$|G| = 10$ とすると、 G の $\langle x \rangle$ による剰余類を考えると

$|G/\langle x \rangle| = 5$ となり、これは G が左剰余作用をする。

置換表現 $\rho: G \rightarrow S_5$ が定まる。

これは $G/\langle x \rangle$ の完全代表系は $\{1, y, y^2, y^3, y^4\}$ であり $xy = y^2x$ を利用して

$\rho(x) = (2354)$ と定まる。(2354) の位数は 4 であり ρ は準同型より

x の位数は 4 の倍数であるが、 $x^2 = 1$ より矛盾。

よって

$$y = 1 \quad \text{である。}$$