

4.4.1.

$G \in \mathcal{P}$ 群 \Leftrightarrow 自然数 n が存在して $|G| = p^n$

よて

$|G| = p^n \Rightarrow G$ は p -群である。① 数学的帰納法で示す

(1) $n=1$ のとき、P53, 命題 2.6.22 より G は巡回群である。

巡回群は p -群である。 G は p -群である。

よて $n=1$ のとき、①は成り立つ。

(2) $1 \leq n \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき、①は成り立つとする。

$n = k+1$ のとき $|G| = p^{k+1}$ とする。

P104, 命題 4.4.3 (1) $|Z(G)| = p^e$ ($1 \leq e \leq k+1$) である。 $Z(G)$ は p -群である。

$g \in G, x \in Z(G)$ とおくと、中心の定義から

$$gxg^{-1} = g^{-1}xg = x \in Z(G) \text{ であり}$$

$Z(G) \triangleleft G$ である。

ゆえに $G/Z(G)$ はラグランジュの定理より

$$|G/Z(G)| = p^{k+1-e} \text{ を満たす。部分群である。}$$

$$1 \leq e \leq k+1 \text{ より}$$

$$0 \leq k+1-e \leq k$$

$0 = k+1-e$ のとき、 $|G| = |Z(G)|$ である。 G は p -群である。 G は p -群である。

$1 \leq k+1-e \leq k$ のとき、帰納法の仮定より

$G/Z(G)$ は p -群である。

(17) $G \cap Z(G) = Z(G)$ は p -群である。 $Z(G)$ は p -群である。

よて 補題より

G も p -群である。

よて $n = k+1$ のときも ①は成り立つ。

(1), (2)より

題意は示された。

[補題]

$N \trianglelefteq G$ $G/N, N$ は \wedge 零群

$\Rightarrow G$ は \wedge 零群.

(証明) $G/N, N$ は \wedge 零群 より

$$G/N = G_0/N \supset G_1/N \supset \dots \supset G_n/N = \{1\}$$

$$N = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_k = \{1\} \quad \text{と } 2 \text{ つの部分群列が存在する.}$$

定理 2.10.2 より各 G_i/N に対し $G \cap N$ を含む部分群 G_i が存在する.

すなわち 自然な準同型 π を用いて $\pi(G_i) = G_i/N$ とする.

$$g_{i+1} \in G_{i+1} \text{ とすると } \pi(g_{i+1}) = g_{i+1}N \in G_i/N$$

$$G_{i+1}/N \subset G_i/N \text{ より } g_{i+1}N \in G_i/N$$

$$g_{i+1} = g_i n \quad (g_i \in G_i, n \in N)$$

$$N \subset G_i \text{ より } g_i n = g_i \in G_i \text{ とおける.} \quad g_{i+1} = g_i \quad \text{より } g_{i+1} \in G_i$$

$$\text{さらに } G_i \supset G_{i+1} \text{ とおける.}$$

以上 $G_i \supset N$ とおける.

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n = N \supset N_0 \supset \dots \supset N_k = \{1\} \text{ とおける}$$

部分群列が存在する.

次に仮定より $N_i \trianglelefteq G$ は明らかである. $G_i \trianglelefteq G$ である.

$g \in G, g_i \in G_i$ に対して G/N は \wedge 零群より

$$\pi(g) \pi(g_i) \pi(g)^{-1} = g_i N \quad (g_i \in G_i) \text{ が成り立つ.}$$

$$(gg_i g^{-1}) N = g_i N$$

$$gg_i g^{-1} \in g_i N$$

$$N \subset G_i \text{ より}$$

$$gg_i g^{-1} \in G_i$$

より

$$G_i \trianglelefteq G.$$

すなわち

仮定より N_i/N_{i+1} は N/N_{i+1} の中心に含まれる.

N_i/N_{i+1} は G/N_{i+1} の中心に含まれることも明らか.

より 最後に

G_i/G_{i+1} は G/G_{i+1} の中心に含まれることを示せばよい.

仮定より $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$ は $(G/N)/(G_{i+1}/N)$ の中心に含まれる.

第三同型定理より $(G_i/N)/(G_{i+1}/N) \cong G_i/G_{i+1}$

$$(G/N)/(G_{i+1}/N) \cong G/G_{i+1}$$

より 同型写像 $\phi: (G/N)/(G_{i+1}/N) \rightarrow G/G_{i+1}$ が存在する.

この $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$ の制限も同型写像であり、

その像は子像の一意的に G_i/G_{i+1} とおける.

第三同型定理は元々

第三同型定理の証明

より $2((G/N)/(G_{i+1}/N))$ の制限の像は $2(G/G_{i+1})$ とおける. (つまり、第三同型定理

同型写像 π は包含関係から定義される.

で $\phi \circ \pi = \phi$ である

結果は明らか

結局 $G_i/G_{i+1} \subset 2(G/G_{i+1})$ とおける.

同型 ϕ は一意的である.

G は $\phi \circ \pi = \phi$ であるから

証明は完了.

(7-652)

題意は示された.

$$\begin{array}{ccc}
 (G/N) / (G_{i+1}/N) & & \\
 \cup & & \cup \\
 (G_i/N) / (G_{i+1}/N) & \subset & Z((G/N) / (G_{i+1}/N)) \\
 \downarrow \phi & \xleftarrow{\text{共通な同型}} & \downarrow \phi \\
 G_i / G_{i+1} & \subset & Z(G / G_{i+1})
 \end{array}$$

共通な同型写像ではないと包含関係が成り立たない
 (例) 元の群 \cong 整数

\cup
 部分群 \cong 図形

明らかに像の世界が異なるので
 整数 \supset 図型ではない