

$$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (132), (123)\}$$

$$\text{であり } |S_3| = 6 \quad \text{である。}$$

6の約数は 6, 3, 2, 1 である。

よって S_3 の部分群 H としては $|H| = 6, 3, 2, 1$ である。

$|H| = 6$ のとき $H = S_3$, $|H| = 1$ のとき $H = \{e\}$ は明らかである。

よって $|H| = 3$ か $|H| = 2$ のとき H の元は S_3 の元である。

(i) $|H| = 2$ のとき H の元の位数は 2の約数であるから 1 または 2 である。

よって $id, (12), (13), (23), (132), (123)$ の
位数は順に 1, 2, 2, 2, 3, 3 である。

ゆえに $H = \langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle$ である。

また $(13)(12)(13) = (23) \notin \langle (12) \rangle$ より

$\langle (12) \rangle$ は正規部分群ではない。

$\langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle$ も同様に正規部分群ではないことが示される。

(ii) $|H| = 3$ のとき H の元の位数は 3の約数であるから 1 または 3 である。

$$(132)^{-1} = (123) \text{ に注意する}$$

$$H = \langle (123) \rangle \text{ であることが分かる。}$$

$$\text{よって } S_3 = \langle (12), (13) \rangle \text{ である}$$

$$(12)(123)(12) = (132) \in \langle (123) \rangle$$

$$(13)(123)(13) = (123) \in \langle (123) \rangle$$

よって $\langle (123) \rangle$ は正規部分群である。

(i) (ii) より S_3 の部分群は

$$\{e\}, \langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle, \langle (123) \rangle, S_3$$

の内の正規部分群は $\{e\}, \langle (123) \rangle, S_3$