

2.8.1 (1) 任意の置換は互換の積で表せる。

$$H = \langle (13), (12) \rangle \quad G = \langle (12), (13), (14) \rangle$$

$$\times \quad (13) = (12)(13)(12) \text{ 等だから}$$

$(12), (13) \in H$ で、 H は有限群。

$$H \triangleleft G \iff (14)(13)(14), (14)(12)(14) \in H$$

$$\begin{aligned} \therefore (14)(13)(14) &= (14) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \notin H \end{aligned}$$

(1) H は正規部分群ではない。

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in H \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \text{1:2.7.}$$

$$\times \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \neq {}^t \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) H は正規部分群ではない。

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \quad \text{1:2.7.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin H$$

f, g Hは正交部分群ではない。

(4) iii) 同様にして考えよ

$$H \triangleleft G \iff (13)(12)(34)(13), (14)(12)(34)(14),$$

$$(12)(13)(24)(12), (14)(13)(24)(14),$$

$$(12)(14)(23)(12), (13)(14)(23)(13) \in H$$

$$(13)(12)(34)(13) = (14)(23) \in H$$

7.12. この式の左, 右から (13) をかき消す。

$$(13)(14)(23)(13) = (12)(34) \in H$$

$$7.17. (14)(12)(34)(14) = (13)(24) \in H.$$

$$(12)(13)(24)(12) = (14)(23) \in H$$

$$\text{同様にして } (14)(13)(24)(14) = (14)(23) \in H$$

$$(12)(14)(23)(12) = (13)(24) \in H$$

17.6.27

$$H \triangleleft G$$

15) $x \in G, y \in H$ とする。

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

(a, b, c, d, e は $ac \neq 0, d \neq 0$ の高次元実数) とする。

よって

$$xyx^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & d \end{pmatrix} \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad & ae+bd \\ 0 & cd \end{pmatrix} \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a/cd & -abd/cd + ae+abd \\ 0 & ocd \end{pmatrix} \frac{1}{ac}$$

$$= \begin{pmatrix} d & \frac{ae}{c} \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$d \neq 0, a, c, d, e$ は実数。

$$xyx^{-1} \in H$$

17.6.27

$$H \triangleleft G$$

$(12)(12)(34)(12)$
 を考えよう。
 ここが単位元になる。
 計算が楽になるように。
 7.17.6.27. 自明な結果。
 $(12)(13)(24)(13)$
 にも同じ様。