

2.10.P

(1) G の位数は 6 であり、 G の元 a の位数は 1, 2, 3, 6 のどれかである。

仮に、位数 3 の元 a が存在しないとする、位数は 1, 2, 6 のどれか。

位数 1 となるのは単位元のみであり、元の数が足りないので、

位数 2 か 6 の元が少なくとも一つ存在する。

そこで位数 6 の元 a が存在するとして、 $G = \langle a \rangle$ であり、 $a^2 \in G$

$(a^2)^3 = 1$ であり、これは位数 3 の元が存在しないことに矛盾。

よって G に 1 の位数が、2 か 1 の元の 4 が存在する。①

ゆえに、問題 2.4.8 より G は可換群である。

これは、任意の部分群は
正規部分群となるので、
ここで演算
が可換になっている。

今、 G から $a \neq 1$ とする $a \in G$ を取り、 $\langle a \rangle$ を考える。

$\langle a \rangle$ は位数 2 の部分群である。 $|G/\langle a \rangle| = 3$ である。

ここで G から $b \notin \langle a \rangle$ / $b \in G$ を満たす元 b を取り、
 G は可換群である。 a は正規部分群である。

$(b\langle a \rangle)^3 = \langle a \rangle$ である。

よって $b^3 \in \langle a \rangle$
 $b^3 = 1, a$

$b^3 = 1$ である。 $b \neq 1$ より、 b の位数は 3 である。これは矛盾である。

よって $b^3 = a$ である。 $a^2 = 1$ より $b^6 = 1$ である。

b の位数が 2 である。 $b^3 = a$ より $b = a$ であり、 $b \in \langle a \rangle$ に矛盾。

したがって $b \notin \langle a \rangle$ より $b \neq 1$ である。 b の位数は 6 である。

これは ① に矛盾する。

(1) より G に 1 の位数 3 の元が存在する。

$a^2 = 1$ である。

よって、位数 6 の可換群の群表を作り、結合律が

成り立つことを示す。 (これは一般性を用いる)

問題 2.5.2 より $\langle a \rangle$ は正規部分群である。 $G/\langle a \rangle$ には 3 元あり、群構造は C_3 である。

(2) 位数 2 の元 a が存在しないとして、 G の単位元以外の元の位数は 3, 6 である。

$G/\langle a \rangle$ の $\langle a \rangle$ ではない元の位数は $G \rightarrow G/\langle a \rangle$ の自然な準同型写像が存在する。

問題 2.5.3 より (1) より、 G に 1 の位数 2 である元が偶数となるような元が
必要なので、位数 6 の元 a が存在する。

よって $G = \langle a \rangle$ であり、 $a^2 \in G$ を考える。

a^2 の位数は明らかに 2 であり、矛盾である。

(1) より 位数 2 の元は存在する。

(3) (i), (ii) G は 12 位数 2 の元 a と、位数 3 の元 b が存在する

$ab \in G$ により考へる.

$$G \text{ は可換群} \quad (ab)^6 = a^6 b^6 = 1$$

よて ab の位数は 1, 2, 3, 6 のどれかであるが:

(i) ab の位数が 1 のとき $ab = 1$

$$a^2 b^2 = 1$$

$$b^2 = 1 \quad \text{となり、} b \text{ の位数が 3 で } b^2 = 1 \text{ に矛盾。}$$

(ii) ab の位数が 2 のとき

$$(ab)^2 = 1$$

$$a^2 b^2 = 1$$

$$b^2 = 1 \quad \text{(i) と同様} \rightarrow \text{矛盾}$$

(iii) ab の位数が 3 のとき

$$(ab)^3 = 1$$

$$a^3 b^3 = 1$$

$$a = 1 \quad a \text{ の位数が 2 で } a = 1 \text{ に矛盾}$$

(i) ~ (iii) より ab の位数は 6 である。 $G = \langle ab \rangle$

よて (例 2, 10, 6 より) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong G$ となる。

(4) (3) と同様の記号を用いて $\langle b \rangle$ は位数 3 の部分群より

$$G / \langle b \rangle = \{ \langle b \rangle, a \langle b \rangle \} \quad \text{となり、} G / \langle b \rangle \text{ には群構造が入る。}$$

$$\text{よて} \quad G = \{ 1, a, b, b^2, ab, ab^2 \} \quad \text{となる。}$$

よて $ab \in \langle b \rangle$ の位数が 2 であることは示す。

$$\{ a \langle b \rangle \}^2 = \langle b \rangle \quad \text{より}$$

代表元を取れば

$$(ab)^2 \langle b \rangle = (ab^2)^2 \langle b \rangle = \langle b \rangle$$

$$ab \langle b \rangle = \langle b \rangle \quad \text{より}$$

$$(ab)^2 = 1, b, b^2, \quad (ab^2)^2 = 1, b, b^2$$

$$(ab)^2 = b \quad \text{なり、}$$

$$(ab)^2 = b^2 \quad \text{なり、}$$

$$aba = 1$$

$$aba = b$$

$$a^2 = 1 \quad \text{より}$$

$$b = 1$$

$$a^2 = 1 \quad \text{より} \quad ab = ba$$

これは矛盾

同様の議論より $G = \langle ab \rangle$ となり、 G は可換群であり矛盾。

よて

$$(ab)^2 = 1 \quad \text{となり、} ab \text{ の位数は 2。}$$

$$\text{よて} \quad (ab^2)^2 = b \quad \text{なり}$$

$$(ab^2)^2 = b^2 \quad \text{なり}$$

$$ab^2 ab = 1$$

$$ab^2 a = 1$$

$$a(ab)^2 = 1$$

$$a^2 = 1 \quad \text{より} \quad b^2 = 1$$

これは矛盾。

$$(ab)^2 = 1 \quad \text{より} \quad a = 1$$

これは矛盾

$$\text{よて} \quad (ab)^2 = 1 \quad \text{となり、} ab^2 \text{ の位数は 2}$$

次に a, ab, ab^2 が共役元であることを示す。

$$(ab)^2 = 1 \quad ||$$

$$abab = 1$$

$$ab = b^{-1}a^{-1}$$

$$ab = b^2a$$

$$a \cdot ab \cdot a^{-1} = ab^2$$

$$\text{f.z.} \quad ab \sim ab^2$$

$$(ab^2)ab(ab^2)^{-1}$$

$$= ab^2ab b^{-2}a$$

$$= ab^2ab^{-1}a$$

$$= ab^2ab^2a$$

$$= (ab^2)^2a$$

$$= a$$

$$\text{f.z.} \quad ab \sim a$$

$$a \sim ab \sim ab^2 \quad \text{である。}$$

(XII)

(5) (4)の表記で $\chi_1 = a, \chi_2 = ab, \chi_3 = ab^2 \in G$.

命題 4.1.12 により ρ は well-defined である。準同型である。

よって後は ρ が全単射であることを示せばよい。

G は有限集合で $|G| = |G_3|$ であり、 ρ が単射であることを示せばよい。

$g \in G$ に対して $\rho(g) = \text{id}$ である。

$$g\chi_i g^{-1} = \chi_i \quad (i=1,2,3)$$

$$g\chi_i = \chi_i g$$

g の位数が 1, 2, 3 である。 $g\chi_i$ の位数は 6 である。 G が可換群にたどることはない。

また、 g の位数が 2 である。 $a a a^{-1} = a, ab(a)(ab)^{-1} = a, (ab^2)a(ab^2)^{-1} = a$

のようになる。 a は G の中心に属する。

実際に計算すると $a a a^{-1} = a, ab(a)(ab)^{-1} = ab a ab = ab^2$

$$(ab^2)a(ab^2)^{-1} = ab^2 a ab^2 = ab \quad \text{である。}$$

成り立つのは

$$a a a^{-1} = a \quad \text{のみ}$$

$$\text{f.z.} \quad \rho(b) = 1 \Rightarrow \text{ある } g \in G \text{ が存在する。}$$

$$\text{f.z.} \quad \rho(a) = 1 \quad \text{である。} \quad a(ab)a^{-1} = a \quad \text{である。}$$

$$a(ab)a^{-1} = a$$

$$ba = a$$

$$b = 1 \quad \text{である。} \quad \text{f.z.} \quad \text{である。}$$

(1.15.7) g の位数は $3 \nmid |g|$ である。 $\rho(1) = 1$ は明らかである。

$$\ker \rho = \{1\}$$

よって

ρ は単射である。

(1.15.7)

$$G \cong G_3$$