

2.10.2

写像 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ ε $x \in \mathbb{R} \mapsto x + a\mathbb{Z}$. $\phi(x) = ax + a\mathbb{Z} \varepsilon$ 也。
 $\varepsilon n \in \mathbb{Z}$ $x, y \in \mathbb{R} \mapsto x + y$

$$\begin{aligned}\phi(x) + \phi(y) &= (ax + a\mathbb{Z}) + (ay + a\mathbb{Z}) \\ &= ax + ay + a\mathbb{Z} \\ &= a(x+y) + a\mathbb{Z} \\ &= \phi(x+y)\end{aligned}$$

よ、写像 ϕ は群の準同型である。

$$\begin{aligned}\text{よ、} \quad \ker \phi &= \{x \in \mathbb{R} \mid ax + a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid ax \in a\mathbb{Z}\} \\ (a \neq 0 \text{ 时}) \quad &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}\end{aligned}$$

よ、 $x + a\mathbb{Z} \mapsto x + a\mathbb{Z}$. $a \neq 0$ 时 $\frac{x}{a} \in \mathbb{R}$. $\phi(\frac{x}{a}) = x + a\mathbb{Z}$

よ、 ϕ は全射である。

(よ、 ϕ は) 準同型定理より

$$\mathbb{R}/a\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$