

4.2.5 (1) $Z_G(\sigma) \supset \langle \sigma \rangle$ は明らかである。

すなわち $\tau \in Z_G(\sigma)$ とおくと $\tau \sigma \tau^{-1} = \sigma$ (1)
 $(\tau(1) \tau(2) \dots \tau(n)) = (1 2 \dots n)$ (2)

置換の分解から $\tau(1)$ は 1 から n のうちの数字になる。仮に i ($i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$)
 になることが、 $\tau(1)$ が決まれば i に 1 の i 番目の数字 i が来る。また、 $\tau(1)$ も決まる。
 逆に (2) を満たすような τ であれば、 $\tau \in Z_G(\sigma)$ とおくと、 $\tau(1)$ の値が異なるとして
 τ も異なる。 $\tau(1)$ は 1 から n までの n 個の候補の数字がある。

$|Z_G(\sigma)| = n$ とおける。

11: σ は長さ n の巡回置換 $\langle \sigma \rangle = n$ とおける。

ゆえに $|Z_G(\sigma)| = \langle \sigma \rangle = n$, $Z_G(\sigma) \supset \langle \sigma \rangle$
 $Z_G(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ とおける。

11: $Z_G(\sigma) \neq \langle \sigma \rangle$ とおくと
 $Z_G(\sigma) \supset \langle \sigma \rangle$ より
 $\tau \in Z_G(\sigma)$, $\tau \notin \langle \sigma \rangle$ とおくと
 成り立つ。したがって
 $\langle \sigma \rangle = \{x_1, \dots, x_n\}$ とおくと
 $Z_G(\sigma) = \{\tau, x_1, \dots, x_n\}$ とおくと
 $|Z_G(\sigma)| = n+1$ とおける。
 $\tau = x_1, \dots, x_n$ とおくと
 成り立つ。
 11: $\tau = x_i$ とおくと
 $\tau \in \langle \sigma \rangle$ とおくと矛盾する。

(2) (1) と同様に $\tau = (2 1 3 4 \dots n)$ にもおけると

$Z_G(\tau) = \langle \tau \rangle$ とおける。

したがって $Z_G(\tau) \supset Z_G(\sigma)$, $Z_G(\sigma) \supset Z_G(\tau)$ とおけると
 $Z_G(\sigma) \subset Z_G(\sigma) \cap Z_G(\tau)$

すなわち $x \in Z_G(\sigma) \cap Z_G(\tau)$ とおくと
 $\exists i, j \in \mathbb{N}, x = \sigma^i = \tau^j$ ($0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$)

すなわち $x \tau = \tau x$ が成り立つ。

$x = \sigma^i$ (1) $\sigma^i \tau = \tau \sigma^i$
 $\sigma^i(1) = \begin{cases} i+1 & (1 \leq i \leq n-1) \\ 1 & (i=0) \end{cases}$

また簡単に $Z_G(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ (1)
 $\sigma^m \in Z_G(\sigma)$ (1) より ($0 \leq m \leq n-1$)
 $m \neq 0$ (1) $\sigma^m \neq \sigma^0$ とおくと
 $\sigma^m(1) = \sigma^0(1) = 1$ とおくと矛盾する。

(1) $i \neq 0$ とおくと $\sigma^i \tau(1) = \sigma^i(3) = 4$

$\tau \sigma^i(1) = \tau(i+1) = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ i+2 & (2 \leq i \leq n-2) \\ 2 & (i=n-1) \end{cases}$

※ $n=3$ のときは
 $2 \leq i \leq n-2$ は
 $i=2$ のみ

したがって $i+2 = 4 \Leftrightarrow i=2$ とおくと $\tau \sigma^2(1) = \sigma^2 \tau(1)$ が成り立つ。

したがって $\sigma^2 \tau(2) = \sigma^2(1) = 3$ と $\sigma^2 \tau(2) \neq \tau \sigma^2(2)$ とおくと矛盾。
 $\tau \sigma^2(2) = \tau(4) = 5$

(2) $i=0$ とおくと $\sigma^i = 1$ (1) $j=0, x=1$ とおくと

明らかに $e \in Z_G(\sigma) \cap Z_G(\tau)$ とおけると

$Z_G(\sigma) \cap Z_G(\tau) = \{1\}$ とおくと、 $Z_G(\sigma) \subset Z_G(\sigma) \cap Z_G(\tau)$

(1), (2) より

したがって $Z_G(G) \neq \emptyset$ (1)
 $Z_G(G) = \{1\}$ とおける。