

位相空間論

半沢鏡

前書き

まずこの文書を記すことになった動機を述べよう. 数学を学ぶ際に位相空間論 (general topology) は抽象的でイメージが湧かないという意見をよく耳にする. 位相空間論を勉強したての頃は, 私自身もその取っ付きにくさにひどく苦戦した. しかし一通り学び終えた後に振り返ってみると, イメージが湧きにくいのは位相空間論そのものではなく, 現代の位相空間論の教え方や構成方法に問題があると感じるようになった. そこで位相空間論への悪しき世間的なイメージを一転させることを目的として, この文書を記すことにしたのである.

このような目的を達成するためには, もちろん位相空間論の一般的な構成方法とは異なる必要がある. 多くの教科書では開集合系から出発するが, 我々は近傍系から始めることにする. こちらから位相空間論を構成した方がイメージがしやすいと感じるからである.

また最初の Chapter1 では, 数学的議論にはあまり立ち入らず, 位相空間論のイメージを収束性と近傍系を用いて説明する. この Chapter1 はこれから位相空間論を学ぶ方にとって, これから学ぶ内容のイメージを持たせるために書いてある. 一方, 既に学んである方にとっても, 学んだ知識が如何に美しく整理され, 位相空間論がイメージに富んだ学問であると感じられるように書いたつもりでもある. 数学的議論にあまり立ち入らないと述べたが, それは厳密でないという意味ではなく, 見通しを良くするために詳しい証明は適宜省くという意味であることに注意して欲しい. 詳細な証明については一般的な教科書を見るか, 一応 Chapter1 以降に少しずつ記す予定であるのでそちらをお待ちいただきたい.

誤植・訂正・要望・感想がある場合はグーグルフォーム <https://forms.gle/mwtHVys6k6DpjkCA9> で連絡していただけると嬉しい. 特に好意的な感想はこの文書を作成するモチベーションにもなるので, 送っていただけると幸いである.

目次

Chapter 1	位相空間論のイメージ	3
1.1	「近さ」ではなく「近づく」	3
1.2	「近づく」の抽象化	5
1.3	近傍系	9
1.4	イメージの検証	10
付録		14
参考文献		14

Chapter 1. 位相空間論のイメージ

前書きでも説明したように、この章では位相空間論のイメージを収束性と近傍系に基づいて説明する。キーワードは「近さ」ではなく「近づく」である。

1.1. 「近さ」ではなく「近づく」

この節ではまず位相空間論は「近さ」ではなく「近づく」を一般化した学問であるということを説明する。なぜ「近さ」ではないのかを考えるために、「近さ」について考えよう。我々は「近い」という言葉を「A 君の家と B 君の家は近い」のようにして用いる。しかし一見ありふれたように見える「近さ」は実は数学的には捉え難い。なぜなら「近い」という感覚は見方に依るからである。例えば「日本とアメリカは近いか？」と尋ねられると、一般的には「近くない」という答えが返ってくるだろうが、海外旅行を頻繁に行う人にとっては「近い」という答えが帰ってきてもおかしくはない。このように見方に依存する相対的な概念は数学的に少々扱いづらい。そこで、どの人から見ても絶対的に「近い」と言える状況があれば、それを数学的に「近い」と考えて議論するのはどうかという発想が生まれる。ここから次のように実数 $\mathbb{R}$ において（限りなく）近いという概念が得られることは自然であろう。

Definition 1.1.1. 実数 $a, b \in \mathbb{R}$ が（限りなく）近いとは、任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|a - b| < \varepsilon$$

が成り立つことである。

正数 $\varepsilon > 0$ に任意性を持たせることで、どんな視点から見ても絶対的に「近い」と言える状況を作り出しているのである。この時点でイメージを持ってない方は、下の物語を読んでゆっくり着実にイメージを自身に落とし込んで欲しい。

ε_1 君： a 君と b 君は（限りなく）近いんだよね。

a & b ： そうだよ！

ε_1 君： じゃあ、 a 君と b 君との距離は 100 m 以内だよ。

a & b ： もちろん！

ε_2 君： いやいや、そんなんじゃ近いと言えないよ。せめて a 君と b 君との距離は 1 m 以内じゃないと。二人の距離は 1 m 以内なのかな？

a & b ： もちろん、1 m 以内だよ。

ε_3 君： いやいや、そんなんでも近いとは言えない？ 私の感覚で言えば 0.00000000001 m 以内の距離じゃないと。

a & b ： 大丈夫、0.00000000001 m 以内だよ。

ε_1 & ε_2 & ε_3 : おお、確かに a 君と b 君は (限りなく) 近いと言えそうだね.

このように絶対的な近さを意味する「(限りなく) 近い」という概念を導入することで、数学的に扱いやすい「近さ」を得ることができた. しかしこの「近さ」はつまらないものになってしまうことが簡単に分かる. つまり次の命題が成り立つのである.

Proposition 1.1.2.

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ が近い} \Leftrightarrow a = b$$

Proof. $\Leftarrow$ から示す. $a = b$ より $|a - b| = 0$ なので, 明らかに任意の $\varepsilon > 0$ について $|a - b| = 0 < \varepsilon$ となる. よって a, b は近い.

次に $\Rightarrow$ を示す. もし $a \neq b$ であるとする, $|a - b| > 0$ なので, a, b は近いの定義において $\varepsilon = |a - b|$ とすれば $|a - b| < |a - b|$ となり矛盾. よって $a = b$. $\square$

つまり $a, b \in \mathbb{R}$ が (限りなく) 近いということは, 結局 $a = b$ ということであるので, わざわざ「近さ」を導入する必要はないのである. 故に数学的に豊かな世界を構築するためには, 「近さ」という概念を少し変化させなければならない. そこで「近さ」ではなく「近づく」ことに焦点を当ててみる. 「近さ」と「近づく」ということの大きな違いは, 前者は静的であるのに対し, 後者は動的ということである. 例えば「A 君の家と B 君の家は近い」と「A 君は B 君の家に近づいている」の違いを考えれば, 後者の文は対象となっている A 君が動きを持ったものとして感じられる. 「近さ」の概念に加えて, 対象に動きを加えることで「近づく」という概念を数学的に扱えないだろうかという発想が再び得られる. もちろん「近さ」のときにも言及したが, 数学的に捉えるためには「近づく」ことにも同様に絶対的な要素を持たせる必要がある. そこで次のように定義すれば良いだろう.

Definition 1.1.3. 実数列 (a_n) が $\alpha \in \mathbb{R}$ に (限りなく) 近づくとは任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 N が存在して

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となることである.

これは巷で言われる ε - N 論法である. 急に N という文字が出現して戸惑う方もいると思うが, この N は数列 (a_n) が動きを得るために必要な文字なのである. N は ε に対して (一意ではないが) 定まるので, この意味で N は ε の関数と考えられる. そこで N を $N(\varepsilon)$ と書くことにすると, ε というどんな視点に対しても, $N(\varepsilon)$ という経過時間以降では数列 (a_n) は視点 ε から見て, 実数 α に近づいているという描像が浮かび上がってくるだろう. 分かりやすいように, 再び物語で解説すると次のようになる.

a_n 君：僕は α ちゃんに（限りなく）近づくことができるよ.

ε 君：本当かい？ それなら α ちゃんの 100 m 以内まで近づいてみてよ.

$N(100)$ 秒後

a_n 君：ほら，近づいてみせたよ.

ε 君：おお. 今度は α ちゃんの 1 m 以内まで近づいてみてよ. 近づけるというなら，このくらいできるでしょ.

$N(1)$ 秒後

a_n 君：どうだい？ 近づいてみせたよ.

ε 君：いいや, まだだ. 近づけるというなら, まだ近づくことができるよね？ 今度は 0.00000000001 m 以内だ.

$N(0.00000000001)$ 秒後

a_n 君：近づいてみせたよ.

ε 君：ふむ, 確かに a_n 君は α ちゃんに（限りなく）近づくことができそうだ.

この「近づく」という概念により, 「近さ」とは異なって, 今日では数学的に豊かな世界が構築されている. 実関数上の微積分がこの良い例であろう. よって「近づく」は重要な概念なので, 数学ではこれを**収束する**という用語で取り立てて表現する. 以下から「(限りなく) 近づく」と「収束する」のどちらの表現も用いることにする.

1.2. 「近づく」の抽象化

さて, このように「近さ」ではなく「近づく」という概念を数学に導入することで, 新たな美しい世界を構築することができた. しかしここで注意する必要があるのは, あくまで実数 $\mathbb{R}$ 上のみということである. $\mathbb{R}$ 以外の空間で同様に「近づく」を Definition 1.1.3 のように定義しようとする, まず $\mathbb{R}$ における絶対値 $|\cdot|$ のように, 2 つの点の間の距離を測る概念があれば, その距離の減少を通して「近づく」ことを定式化できるのではないか, という発想にいたるだろう. そこで距離を次のように定義する.

Definition 1.2.1. 集合 $X (\neq \emptyset)$ 上の**距離** $d(\cdot, \cdot)$ とは, 任意の $x, y, z \in X$ について, 次の 3 つの性質を満たす写像 $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ のことである.

- I. (非負性) $d(x, y) \geq 0$
- II. (同一律) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- III. (対称律) $d(x, y) = d(y, x)$
- IV. (三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

また X と d を合わせた (X, d) を**距離空間**と呼び, 省略して X のみで距離空間と呼んでもよいことにする.

この距離の定義は我々の感覚になじむことを着実に確認しよう. 非負性は「A 君の家と B 君の家との距離は -1m 」などと言わないことから分かり, 同一律は「A 君の家と距離が 0なのは, A 君の家のみ」ということで, これも腑に落ちるものである. 対称律に関しては言うまでもないだろう. 最後の三角不等式に関しては, X 上の 3 地点 x, y, z を頂点とする“三角形”を考えると, 三角形の 1 つの辺の長さは他の 2 つの辺の長さの和よりも小さいということを述べているだけである. 三角不等式の名前の由来的にはこの説明で正しいのだが, 私個人の感覚で言えば, 寄り道 y を挟んだ経路 $x \rightarrow y \rightarrow z$ の距離は, 経路 $x \rightarrow z$ の距離よりも長くなるというイメージである. つまり寄り道したら距離が長くなるということである.

このような我々が一般的な言葉の意味として“距離”と呼ぶものの性質を抽出することで, 数学的な“距離”の概念を得ることができた. 実際, 我々が $\mathbb{R}$ 上の距離として直感的に考える $d(x, y) = |x - y|$ は上の距離の公理を満たし, 2 次元実空間 $\mathbb{R}^2$ 内の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ について, 我々が直感的に考える意味での距離

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

も距離の公理を満たしている. 詳細は省くがマンハッタン距離などの直感的に“距離”と考えられるものや, 関数間の距離といった非直感的な例も知られている.

この距離を使えば, 「近づく」ことを距離空間内では次のように表現することは今までの議論から自然であろう. ※一応初学者のために下の定義で出てくる「 (X, d) 内の点列 (a_n) 」の意味を軽く補足すると, 数列で $a_n \in X$ となっているものという認識で十分である.

Definition 1.2.2. 距離空間 (X, d) 内の点列 (a_n) が $\alpha \in X$ に (限りなく) 近づく, もしくは収束するとは, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 N が存在して

$$n \geq N \Rightarrow d(a_n, \alpha) < \varepsilon$$

となることである.

このようにして「近づく」ことを距離空間にまで拡張することができた. しかしもっと拡張することができないかと考えるのが, 人の性である. もっと拡張できるとするなら, それこそ距離という概念を捨て去らなければならないだろう. そんなことが可能だろうか. それが可能であるというのが, 位相空間への出発である. ではどのようにして「近づく」というイメージの拡張を行うのだろうか. そのことを説明するためにメリーさんの電話の話に付き合っていたきたい.

メリーさんの電話とは怪談系都市伝説の一種で, ある少女がアメリカから日本に引っ越しをする際, 古びた人形を捨てていったことから始まる. 引っ越してから数日経つと, 少女のもとに電話が度々かかってくるようになる. 一回目の電話では「あたしメリーさん, 今地球にいるの」と言われ, 二回目では「あたしメリーさん, 今日本にいるの」と言われ少女はだんだんと不気味に感じていく. 三回目では「あたしメリーさん, 今あなたの家の前にいるの」と言われ, 少女は思い切ってド

アを開けて、家の前を確認する。何もないことに安堵した少女のもとに再び電話がかかってきて「あたしメリーさん、今あなたの後ろにいるの」と言われるという物語である。

ここでこの話がなぜ怪談話として成立しているのかを考えたい。それはやはり、少女のもとに、不気味なメリーさんがだんだんと“近づいている”ことを感じるからである。しかしこの怪談話において、距離的な概念は用いていないことに注目して欲しい。近づくことを距離的な概念によってしか説明できないなら、「あたしメリーさん、今あなたの半径5m以内にいるの」という電話になるはずである。ではなぜ距離的な概念なしに、「近づく」ことを感じられたのだろうか。それはやはり

地球 ⊃ 日本 ⊃ 少女の家の周辺 ⊃ 少女の周囲 ⊃ メリーさん

というように、少女に「近づく」ことを検知できるような集合「地球、日本、少女の家の周辺、少女の周囲」に、電話の回数増やすことで、メリーさんが属するようにできるからである。つまり距離的な概念を用いずとも、集合の包含関係や元の帰属関係によって「近づく」ことを表現できる可能性が見えてくる。このイメージをもとに位相空間の構築していこう。

数学的な考察に移るために集合 $X \neq \emptyset$ を土台にして考えよう。包含関係や帰属関係をもとに「近づく」ことを表現するために必要なものとして、メリーさんの話から分かることは、ある対象に「近づく」ことを検知できるような集合たちの設定が必要である。そこで $x \in X$ に「近づく」ことを検知できるような集合を x の近傍と呼び、普通は V_x で書く。そして x の近傍を集めたものを x の近傍系と呼び、普通は $V(x)$ で書くことにする。また X の各点 x に対し、その近傍系 $V(x)$ が定められているとき、 X と $V(\cdot)$ を合わせた $(X, V(\cdot))$ を位相空間と呼び、省略して X のみで位相空間と呼んでもよいことにする。これらの用語は後に Definition 1.3.1 で数学的に定義するので、安心していただきたい。

このような各点 x に「近づく」ことを検知できるような集合系 $V(x)$ をもった位相空間 X が数学的にきちんと定式化されていたとすると、「近づく」という概念はメリーさんの話から次のように定義するのが自然であろう。

Definition 1.2.3. 位相空間 $(X, V(\cdot))$ 内の点列 (a_n) が $\alpha \in X$ に (限りなく) 近づく、もしくは収束するとは、任意の α の近傍 V_α に対し、ある自然数 N が存在して、

$$n \geq N \Rightarrow a_n \in V_\alpha$$

となることである。

これまでの ε を、 α への「近づき」を検知する集合 V_α へと置き換えただけである。再びイメージを補足するため、下でメリーさんの話風解説を載せている。

a_n さん： あたし a_n さん、今 α ちゃんの近傍 V_1 にいるの。

少女 α ： (変な電話ね。別に私の近傍 V_2 にいるわけでもないし、気にしなくても良さそうね)

N_2 日後

a_n さん： あたし a_n さん、今 α ちゃんの近傍 V_2 にいるの。

少女 α ： (私の近傍 V_2 まで来てて、なんだか不気味だわ。でも流石に私の近傍 V_3 まで来ることはないでしょう)

N_3 日後

a_n さん： あたし a_n さん、今 α ちゃんの近傍 V_3 にいるの。

少女 α ： (とうとう私の近傍 V_3 まで来てるわ。怖いわ。確実に a_n さんは私に (限りなく) 近づいているわ)

さて、ここまでの話で「近づく」ことをイメージと抱き合わせながら抽象化してきた。しかしあともう1つ抽象化すべき箇所がある。それは点列 (a_n) の添え字集合が自然数の集合 $\mathbb{N}$ である点である。自然数の集合 $\mathbb{N}$ は可算かつ全順序といった性質を持つ、特殊な無限集合である (分からない方向けに簡潔に説明すると、可算とは無限の中で最も基本的なものであるということ、全順序とは $1 \leq 3$ のようにどの2つの要素も比較ができるということである)。特に可算性はかなり異質な様相を放つ。なぜなら近傍系 $V(x)$ は近傍 V_x という集合を集めた集合、つまり集合の集合ということになり、これは可算性とかなり相性が悪いからである (集合の濃度を知っている方向けに解説すれば、 $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ ($\aleph_0$ は可算濃度) のように、べき集合の濃度は簡単に可算濃度を飛び抜けてしまうからである)。位相空間論を習った方はお分かりだろうが、位相空間における可算性は、わざわざ第一可算公理や第二可算公理などの大仰な名前を付けるほど異例なものであることが、学んでいく内に実感できるだろう。そこで点列の添え字集合を、下で定義される有向集合というものに置き換えることを考える。

Definition 1.2.4. 半順序集合 $(\Lambda, \leq)$ が次の条件 (*) を満たすとき、 $(\Lambda, \leq)$ は**有向集合**と呼ぶ。

(*) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対し、ある $\gamma \in \Lambda$ が存在して $\alpha \leq \gamma$ かつ $\beta \leq \gamma$ が成り立つ。

これまで添え字集合として使ってきた自然数の集合 $\mathbb{N}$ はもちろん有向集合となる。また一番嬉しいのは後に Definition 1.3.1 で数学的に定義する x の近傍系 $V(x)$ も集合の包含関係 $\subset$ という半順序を導入すれば、有向集合となる点である。つまり有向集合は「近づく」ことを検知できるような集合と相性が良いのである。この有向集合 $(\Lambda, \leq)$ を添え字とした X の点列 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の**有向点列**と呼ぶ。この有向点列に対して「近づく」概念が次のように抽象化されるのは自然であろう。

Definition 1.2.5. Definition 位相空間 $(X, V(\cdot))$ 内の有向点列 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $\alpha \in X$ に**(限りなく) 近づく**、もしくは**収束する**とは、任意の α の近傍 V_α に対し、ある $\delta \in \Lambda$ が存在して、

$$\lambda \geq \delta (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow a_\lambda \in V_\alpha$$

となることである。

ここまで抽象化することで、ようやく位相空間論を組み立てるには十分な「近づく」という概念を構成することができた。フィルターと呼ばれる概念を使って、有向点列の収束を表現することもできるらしいのだが、特に必要というわけでもないで、立ち入らないことにする。さて次節では、ここまで避けてきた近傍系の数学的な取り扱いについて考えよう。

1.3. 近傍系

前節では $x \in X$ に「近づく」ことを検知できるような集合の集まりとして x の近傍系を説明した。では数学的にどのように取り扱われるのだろうか。 x の近傍系が「近づく」ことを表現できるためには、もちろんなんらかの条件で絞られる必要がある。そこで抽象化しつつも、我々の直感にギリギリまで沿う形で、位相空間論では次のような条件を満たすものを、 x の近傍系と呼ぶ。

Definition 1.3.1. 集合 X 内の任意の点 x に対し、 X の部分集合を元とする集合系 $\mathbf{V}(x) \neq \emptyset$ が定まっており、次の4つの条件（ハウスドルフの公理系）を満たしているとする。

- I. $V \in \mathbf{V}(x) \Rightarrow x \in V$
- II. $V \in \mathbf{V}(x)$ で、 $V \subset V' \subset X \Rightarrow V' \in \mathbf{V}(x)$
- III. $V_1, V_2 \in \mathbf{V}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathbf{V}(x)$
- IV. 任意の $V \in \mathbf{V}(x)$ に対して、 $W \subset V$ ($W \in \mathbf{V}(x)$) が存在して、任意の $y \in W$ に対して $V \in \mathbf{V}(y)$ となるようにできる。

このとき各 $\mathbf{V}(x)$ を x の近傍系と定義する。また X と $\mathbf{V}(\cdot)$ を合わせた $(X, \mathbf{V}(\cdot))$ を位相空間と呼び、省略して X のみで位相空間と呼んでも良いことにする。

丁寧に一つずつ条件を直感的に理解していこう。まず条件 (I) は、 x の近傍系を定めたいのだから、 V が x の近傍系 $\mathbf{V}(x)$ に属するなら、 $x \in V$ となるのは自然であろう。条件 (II) は近傍系の要請というより、むしろ近傍系をある程度緩くとっても良いことを保証するような条件に感じる。というのも $V \in \mathbf{V}(x)$ で、 $V \subset V' \subset X$ となる V' を $\mathbf{V}(x)$ に付け加えても、有向点列の収束 Definition 1.2.5 において、 $\lambda \geq \delta$ ($\lambda \in \Lambda$) $\Rightarrow a_\lambda \in V \subset V'$ となり、近づき方を壊さないからである。そして条件 (III) は、「 x に近づくことを検知できる2つの領域の共通部分も、 x に近づくことを検知できる」と述べているだけである。またこの条件 (III) により、 x の近傍系 $\mathbf{V}(x)$ に $V \leq W \Leftrightarrow V \supset W$ となる半順序を導入することで、 $\mathbf{V}(x)$ は有向集合となることも押さえておこう。

最後の条件 (IV) については解釈が少々厄介である。まず条件 (I) ~ (III) と異なり、条件 (IV) では、 $\mathbf{V}(x)$ だけでなく、 y という X の別の要素の近傍系 $\mathbf{V}(y)$ が出現していることに注目して欲しい。これはつまり、条件 (IV) で初めて、各点の近傍系間の関係に言及していることになる。ではどのように関係を定めているのと言え、 $V \in \mathbf{V}(x)$ は x に十分近づいた点 (W 内の点) の近傍でもあるということになる。要するに近傍間に関係に整合性を持たせる条件と考えられる¹⁾。

1) これは私の個人的な疑問だが、空間 X 全体ではなく、一点 x だけの収束を取り扱いたいという状況なら、条件 (IV) を

現代では、このように x の近傍系を定義することによって、位相空間論を構成していくのである。一つ注意してほしいのは、近傍という言葉につられて、次のような説明をするのはよろしくないということだ。「 $y \in X$ は x の近傍 V_x に属するから、 x と y は近いと考えられる」という説明だ。本書のイメージで説明すれば、近傍系のイメージ的な出発点はあくまで動的な「近づく」ことを検知できるような集合であり、「近い」という静的な概念を説明する道具ではないので、この説明は非常によろしくない。実際、本書の説明に依らなくても、実数の集合 $\mathbb{R}$ 自身は任意の実数の近傍であるが、0 の近傍とみなしたとき、「 $100 \in \mathbb{R}$ だから 0 と 100 が近い」と述べるのは明らかにおかしいことが分かるだろう。再三になるが、「近い」と「近づく」の概念を区別して、位相空間論を議論して欲しい。

多くの教科書では近傍系ではなく開集合系を用いて位相空間を定めることがスタンダードである。そのため近傍系から始めて大丈夫か不安になる方もいらっしゃると思うが、近傍系を定めるとと、開集合系を定めることは対応することが知られているので、安心していただきたい。次節では Chapter 1 の締めくくりとして、ここまで培ってきたイメージが、しっかり厳密な議論に適用できるかを検証しよう。

1.4. イメージの検証

数学の概念を直感的なイメージで説明する際は、その直感的なイメージが厳密な議論にどれだけ沿っているのかを検証する必要があるだろう。私の説明したイメージが位相空間論をうまく説明する例として、最も分かりやすいものは次の密着空間・離散空間である。

Definition 1.4.1. 任意の集合 $X \neq \emptyset$ を考える。

- $x \in X$ の近傍系 $V(x)$ を $V(x) = \{X\}$ と定めた、位相空間 X を**密着空間**と呼ぶ。
- $x \in X$ の近傍系 $V(x)$ を $V(x) = \{x \text{ を含むような } X \text{ の部分集合}\}$ と定めた、位相空間 X を**離散空間**と呼ぶ。

これらの近傍系が Definition 1.3.1 を満たすことの証明は割愛させていただく。大事ななのは、なぜ密着や離散という用語が使われているのかということである。ここでも大事なのはやはり「近づく」ということである。

まずは密着空間について考えよう。これを「近づく」つまり、有向点列の収束によって下のよう

なくした“ x の近傍”を考えてもよいのではと感じる。ChatGPT に軽く尋ねると、プレ近傍系 (pre-neighborhood system) という概念を紹介されたが情報が少ない。この疑問に対して答えを持ち合わせている有識者がいたら、教えていただきたい。

Proposition 1.4.2. 位相空間 X について次の同値関係が成り立つ.

X が密着空間である.

$\iff \forall x \in X$ の任意の定有向点列 $(x)_{\lambda \in \Lambda}$ は, X の任意の点に近づく.

まず用語の説明をしよう. x の定有向点列とは $a_\lambda = x$ ($\forall \lambda \in \Lambda$) という有向点列である. ただの x という値を取り続ける点列である. そのため x の定有向点列は x そのものとみなすことができるだろう. そのように考えたとき, ややラフな形ではあるが, 上の命題は次のように書き換えられる.

X が密着空間である.

$\iff \forall x$ は X のどの点にも (限りなく) 近づく.

この「 x は X のどの点にも (限りなく) 近づく」という性質は「どの要素同士も密着できる」と考えるのが自然であるため, X を密着空間と呼ぶのも自然であろう. それでは証明に移ろう.

Proof. まず $\Rightarrow$ を示そう. x の任意の定有向点列 $(x)_{\lambda \in \Lambda}$ と X の任意の点 y を取ってくる. 今密着空間で考えているので, y の任意の近傍とは, すなわち X のことである. このとき, もちろん $x \in X$ ($\forall \lambda \in \Lambda$) なので $(x)_{\lambda \in \Lambda}$ は y に近づく.

次に $\Leftarrow$ を示そう. 近傍系の Definition 1.3.1 から, $V(x) \neq \emptyset$ なので, ある $V \in V(x)$ が取れる. 近傍系の公理 (II) より $V \subset X \in V(x)$ となる. よって X 以外の $S \subset X$ が $V(x)$ に含まれないことを示せば良い. 以下背理法のため $S \in V(x)$ とする. $X \neq S$ より, $X \setminus S \neq \emptyset$. そこで $x_0 \in X \setminus S$ を取る. このとき $S \in V(x)$ より $x \in S$ であるので $x_0 \neq x$ である. このとき x_0 の定有向点列 $(x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ を考えると, 前提より x に近づく. しかしこれは Definition 1.2.5 より, x の近傍 S に対し, ある自然数 N が存在し $N \geq n \Rightarrow x_0 \in S$ を意味し, $x_0 \notin S$ に矛盾する. したがって $V(x) = \{X\}$ となり, 題意は示された²⁾. $\square$

同様に離散空間についても考えていこう. 離散空間も有向点列の「近づき」によって捉えるために, まず以下の用語を定義する.

Definition 1.4.3. 位相空間 X の有向点列 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が本質的に x の定有向点列であるとは, ある $\delta \in \Lambda$ が存在して,

$$\lambda \geq \delta \ (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow a_\lambda = x$$

となることである.

2) 証明を読んで, Proposition 1.4.2 において有向点列でなく普通の点列 $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ でも良いのではと感じた鋭い方もいるだろう. そのご指摘はもちろん正しい. しかし後に Proposition 1.4.4 で離散空間についての類似した結果を示すが, この場合は普通の点列ではダメなのである. 実際反例としてその命題の $\Leftarrow$ について, $\mathbb{R}$ 上の補可算位相空間が挙げられる (本書が好評であれば, 付録で説明したい). この例は位相空間の「近づき」から見た特徴づけにおいて, 点列の添え字が自然数 $\mathbb{N}$ では不十分であることを示す良い例である.

要するに用語の通り、ほぼ x の定有向点列と考えてよいような有向点列ということである。有向集合として自然数集合 $\mathbb{N}$ で考えてみると、ある番号 N 以降は x という一定の値を取り続ける点列のことを指すことになるので分かりやすいだろう。この概念を用いて、離散空間を「近づき」で捉えると次の命題が成り立つ。

Proposition 1.4.4. 位相空間 X について次の同値関係が成り立つ。

X が離散空間である。

$\iff \forall x \in X$ について、 x に近づく X の有向点列 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は本質的に x の定有向点列であるものに限る。

本質的に x の定有向点列なものも、 x の定有向点列と同様 x そのものとみなしても良いだろう。よって再びラフな考え方で

X が離散空間である。

$\iff \forall x \in X$ について、 X に近づけるのは x 自身のみ。

と考えられる。「 $x \in X$ について、 X に近づけるのは x 自身のみ」という性質は「どの要素同士も離れている」と考えるのが自然であるため、 X を離散空間と呼ぶのも自然である。それでは証明に移る。

Proof. まず $\Rightarrow$ を示す。 $\forall x \in X$ について、離散性より $\{x\} \in \mathbf{V}(x)$ である。よって x に近づく X の有向点列 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ について、ある $\delta \in \Lambda$ が存在して、 $\lambda \geq \delta$ ($\lambda \in \Lambda$) $\Rightarrow a_\lambda \in \{x\}$ となる。もちろん $a_\lambda \in \{x\} \Leftrightarrow a_\lambda = x$ なので、 $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は本質的に x の定有向点列となり、 $\Rightarrow$ は示された。

次に $\Leftarrow$ を示す。 $\forall x \in X$ について $\{x\} \in \mathbf{V}(x)$ を示せば十分である。なぜなら $\{x\} \in \mathbf{V}(x)$ を示せば、近傍系の Definition 1.3.1 の条件 (II) から、 x を含むような X の部分集合 $\in \mathbf{V}(x)$ が言えるからである。背理法により示すため、ある $x_0 \in X$ について $\{x_0\} \notin \mathbf{V}(x_0)$ と仮定する。すると各 $V \in \mathbf{V}(x_0)$ について、 $V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ である。そこで $\mathbf{V}(x_0)$ 自身を添え字有向集合 (もちろん集合の包含関係 $\subset$ により有向集合とする) とし、 $a_V \in V \setminus \{x_0\}$ となるような有向点列 $(a_V)_{V \in \mathbf{V}(x_0)}$ が取れる。この点列はもちろん取り方から、 x_0 の任意の近傍 $V \in \mathbf{V}(x_0)$ に対して、 $W \geq V$ ($W \in \mathbf{V}(x_0)$) $\Rightarrow a_W \in V$ となる ($\mathbf{V}(x_0)$ の半順序の定め方から $W \geq V \Leftrightarrow W \subset V$ で、 $a_W \in W \subset V$ となるからである)。よって $(a_V)_{V \in \mathbf{V}(x_0)}$ は x に近づく。しかし有向点列の作り方から、 $a_V \neq x_0$ ($V \in \mathbf{V}(x_0)$) なので、これは本質的に x の定有向列ではなく、前提に矛盾する。したがって $\{x\} \in \mathbf{V}(x)$ で題意は示された。 $\square$

このように「近づき」の観点から密着・離散空間を捉えることで、“密着”や“離散”の意味がはっきりしたと思われる。実は「近づき」の観点から捉えることで、このようにイメージが花開く例は私が取り敢えず知っているだけでも、下のようにたくさんある。

- 閉集合 … 「近づき」について閉じている集合。

- ハウスドルフ空間… 有向点列はたかだか一つの点にしか「近づく」ない空間.
- 連続写像… 異なる空間上の「近づく」を保つような写像.

かなり抽象的な記述になってしまったが、どれも数学的にしっかり定式化できる. 本書が好評であれば、後の Chapter でこれらについても厳密に議論していきたい.

付録