和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} {}_{i+n}\mathrm{C}_n$ を求めよ。

[解答]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m} {}_{i+n}\mathrm{C}_n \\
&= \sum_{i=0}^{m} [l_1 + l_2 + \cdots + l_{n+1} = i \text{ を満たす 0 以上の整数の組 } (l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}) \text{ の個数}] \\
&= [l_1 + l_2 + \cdots + l_{n+1} \leq m \text{ を満たす 0 以上の整数の組 } (l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}) \text{ の個数}] \\
&= {}_{m+n+1}\mathrm{C}_n \quad \square
\end{aligned}
$$

$l_1 + l_2 + \cdots + l_{n+1} = i$ という等式が $\sum$ によって $l_1 + l_2 + \cdots + l_{n+1} \leq m$ という不等式に変わっているのが，個人的に好きです。

[別解]　差分法を用いる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{m} {}_{i+n}\mathrm{C}_n \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{(i+n)!}{i!n!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{m} (i+n)(i+n-1)\cdots(i+1) \\
&= \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{m} [(i+n+1) - i](i+n)(i+n-1)\cdots(i+1) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{m} [(i+n+1)(i+n)\cdots(i+1) - (i+n)(i+n-1)\cdots i] \\
&= \frac{(m+n+1)(m+n)\cdots(m+1)}{(n+1)!} \\
&= {}_{m+n+1}\mathrm{C}_n \quad \square
\end{aligned}
$$