$n \geq m$ のとき，和 $\displaystyle\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=n \\ j_1,j_2,\cdots,j_m \geq 1}} j_m b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_m}$ を

$\displaystyle d_{m,n} = \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=n \\ j_1,j_2,\cdots,j_m \geq 1}} b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_m}$ を用いて求めよ。

[解答]　$\displaystyle S = \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=n \\ j_1,j_2,\cdots,j_m \geq 1}} j_m b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_m}$ とおくと，

対称性より (カウント変数 j_m を j_i に書き換えても大丈夫だから)

$$S = \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=n \\ j_1,j_2,\cdots,j_m \geq 1}} j_1 b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_m} = \cdots = \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=n \\ j_1,j_2,\cdots,j_m \geq 1}} j_m b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_m}$$

よって

$$\begin{aligned} mS &= \underbrace{S + \cdots + S}_{m\text{ 個}} \\ &= \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=n \\ j_1,j_2,\cdots,j_m \geq 1}} (j_1 + \cdots + j_m) b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_m} \\ &= \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_m=n \\ j_1,j_2,\cdots,j_m \geq 1}} n b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_m} \\ &= n d_{m,n} \end{aligned}$$

となるので，$S = \dfrac{n}{m} d_{m,n}$ と表せられる。　□

対称性と $\sum$ の条件式を用いた，少し変わった和の求め方なのが，個人的に好きです。